

# APPORTS DE LA METHODE CINEMATIQUE DU CALCUL A LA RUPTURE POUR LA CONCEPTION DES SOUTÈNEMENTS

## **BENEFITS OF THE YIELD DESIGN KINEMATICAL APPROACH TO THE DESIGN OF EARTH RETAINING STRUCTURES**

Fahd CUIRA<sup>1</sup>, Bruno SIMON<sup>1</sup>  
<sup>1</sup> Terrasol, Paris, France

**RÉSUMÉ** – L'approche cinématique du calcul à la rupture est le cadre théorique rigoureux en référence duquel peuvent être évalués certains schémas de calcul couramment adoptés pour évaluer les états limites de poussée ou butée contre les écrans de soutènement. Les exemples traités dans cette communication illustrent que certaines approximations sont pessimistes et d'autres peu sécuritaires.

**RÉSUMÉ** – The kinematical approach of yield design theory is one rigorous framework to use for assessing reliability of some widely used schemes of active or passive pressure limit states against earth-retaining structures. Examples are given where some of those approximations are quite pessimistic and others lie quite on the unsafe side.

### **1. A propos de la méthode cinématique du calcul à la rupture**

#### **1.1 Cadre particulier d'application**

Le calcul à la rupture, formalisé et développé par Jean Salençon (Salençon, 1983), constitue le cadre théorique pour examiner les chargements limites applicables à des systèmes (ou ouvrages), dans une géométrie donnée, en référence aux capacités de résistance des matériaux qui les constituent. Elle permet d'établir des bornes, respectivement inférieure et supérieure, des chargements extrêmes par deux approches distinctes : l'approche statique par l'intérieur et l'approche cinématique par l'extérieur.

L'approche cinématique par l'extérieur est une des méthodes de calcul proposées par le logiciel Talren consacré à la détermination des charges de rupture des ouvrages géotechniques. Elle est appliquée, dans le cadre spécifique du seul critère de rupture de Mohr-Coulomb, à des rotations de blocs rigides dont les frontières sont des successions d'arcs de spirales logarithmiques de même pôle  $r(\theta) = r_0 e^{\theta \tan \phi}$  où  $\phi$  représente l'angle de frottement de la couche où se développe chaque arc (Simon, 2006). Il faut noter que les vitesses, perpendiculaires au rayon vecteur, ne sont pas tangentes à la frontière du bloc ; cette frontière ne peut donc pas être assimilée à une surface de glissement.

Salençon (1983) a établi que, dans ce cadre particulier, les mouvements de tels blocs rigides fournissent une majoration optimale du moment  $M_{rm}$  des efforts résistants liés au sol sur la frontière du bloc en mouvement. En appelant  $M_e$  le moment des efforts extérieurs appliqués au bloc, lorsque le rapport  $F = M_{rm}/M_e$  est inférieur à 1, l'instabilité est certaine. Coussy (1979) a proposé d'appeler ce rapport  $F$  « coefficient de rupture ».

Chaque bloc est entièrement défini par ses points d'entrée et de sortie sur le contour du talus et l'angle au centre  $\theta_{max}$ . Une valeur nulle  $\theta_{max}$  caractérise des arcs de spirale dont le pôle est rejeté à l'infini, soit une chaîne de segments : la comparaison des moments  $M_{rm}$  et  $M_e$  s'identifie alors à celle des projections des efforts appliqués au bloc sur une direction unique et particulière, inclinée à  $\phi_i$  par rapport à chacun des segments.

L'approche cinématique associée à ce cadre restreint d'hypothèses est celle à laquelle il est fait référence dans ce papier sous la dénomination de « calcul à la rupture ».

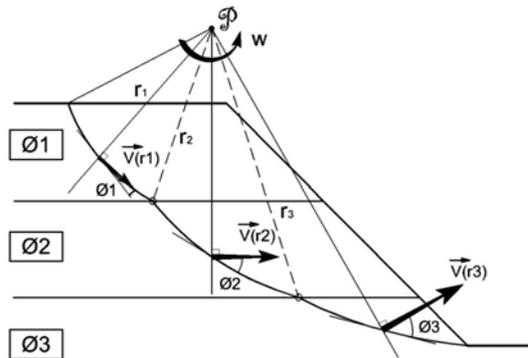


Figure 1. Frontière d'un bloc - succession d'arcs de spirale logarithmique de même pôle.

## 1.2. Intérêts de la méthode

Le calcul à la rupture s'inscrit dans un cadre théorique rigoureux :

- La sécurité est évaluée sans autre hypothèse que celle exprimant que le critère de Mohr-Coulomb est pertinent pour les sols ;
- La charge de rupture est toujours définie par excès, ce qui caractérise de manière forte cette approche par rapport aux méthodes des tranches (Fellenius, Bishop, ..) qui du fait de l'introduction d'hypothèses complémentaires ne permettent pas de conclure sur le caractère par excès ou par défaut de la charge de rupture estimée. La méthode du calcul à la rupture offre l'avantage de pouvoir considérer autant des équilibres de poussée (gravité motrice) que des équilibres de butée (gravité résistante) ; à la différence des méthodes des tranches (Fellenius, Bishop) qui ne traitent que d'équilibres où la gravité est motrice. Elle a également la capacité de prendre en compte des surcharges réparties de directions quelconques, au contour du modèle, sans qu'aucune hypothèse complémentaire concernant leur diffusion au sein du massif de sol n'ait à être posée. Tous types de conditions hydrauliques peuvent être introduits dans l'analyse (conditions hydrostatiques, réseau d'écoulement). Les conditions sismiques peuvent être traitées selon une approche pseudo-statique.

Ces spécificités sont particulièrement intéressantes vis-à-vis du dimensionnement des ouvrages de soutènement et notamment la définition des états d'équilibre limite du massif de sol de part et d'autre des écrans. Ces états sont précisément ceux pouvant être associés aux valeurs du coefficient de rupture  $F = 1$ . Ceci est illustré par les différents exemples décrits dans ce papier.

## 2. Evaluation des états d'équilibre limite de part et d'autre des écrans

### 2.1. Comparaison aux résultats des tables de poussée et butée

Pour une inclinaison  $\delta$  fixée par rapport à la normale au parement, le profil limite de pression dans un massif frottant est obtenu en recherchant la valeur maximale  $\sigma_{\max}$  d'une surcharge triangulaire à appliquer dans un équilibre de poussée (Figure 2a, force de gravité motrice) ou de butée (Figure 2b, force de gravité résistante) pour atteindre un coefficient de rupture égal à 1. Les valeurs  $\sigma_{\max}$  peuvent être comparées aux valeurs issues des tables de Kerisel et Absi (2003) pour les mêmes conditions limites. Le tableau 1, établi pour un angle de frottement  $\phi = 30^\circ$ , montre que les valeurs obtenues avec la méthode du calcul à la rupture diffèrent de quelques pourcents seulement des valeurs exactes établies numériquement. Les valeurs du coefficient de poussée sont toujours

inférieures à celles des tables, alors que celles du coefficient de butée sont toujours supérieures. Ceci est conforme au caractère « par l'extérieur » de l'approche mise en œuvre (surestimation de la charge de rupture du système).

Tableau 1. Comparaison des valeurs  $k_a$  ou  $k_p$  calculées aux valeurs des tables ( $\phi = 30^\circ$ ).

<b>Poussée</b>	$\delta/\phi = 0$	$\delta/\phi = +2/3$	$\delta/\phi = +1$	<b>Butée</b>	$\delta/\phi = 0$	$\delta/\phi = -2/3$	$\delta/\phi = -1$
$k_a$ (table)	0,333	0,300	0,308	$k_p$ (table)	3,00	5,30	6,50
$k_a$ (calcul)	0,333	0,300	0,305	$k_p$ (calcul)	3,00	5,34	6,93
Rapport	1,00	1,00	0,99	Rapport	1,00	1,01	1,07

L'écart relatif augmente avec la valeur absolue de l'inclinaison. Pour des inclinaisons  $\delta$  significatives, les mécanismes critiques s'écartent sensiblement du mécanisme plan ( $\theta = 0$ ) associé au modèle de Rankine (applicable pour  $\delta = 0$ ) ou de celui résultant de la juxtaposition d'un équilibre de Rankine et d'un équilibre de Boussinesq dans la solution des tables (correspondant à  $\delta \neq 0$  dans le cas particulier examiné).

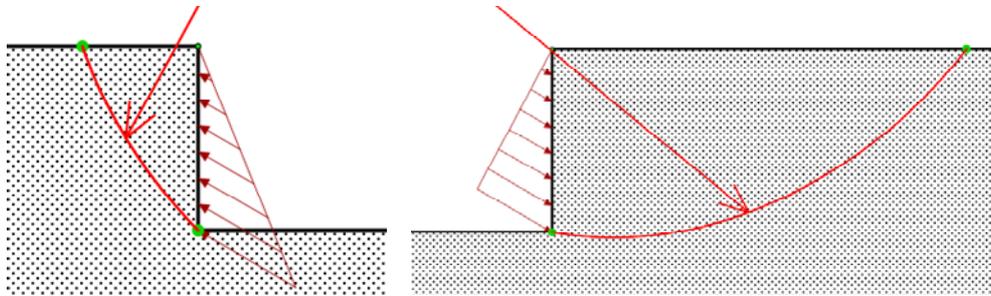


Figure 2. Détermination des profils limites de poussée et butée ( $\phi = 30^\circ$ ,  $\delta/\phi = +1$  et  $-1$ ).

## 2.2. Poussée dans un milieu purement cohérent

On s'intéresse aux états de poussée dans un milieu purement cohérent, ce qui est le cas lorsque le sol concerné révèle un comportement non drainé, caractérisé par un couple de valeurs  $c_u \neq 0$  et  $\phi_u = 0$ . Dans le modèle de Rankine, la résistance au cisaillement du sol est mobilisée dans deux familles de plans conjugués inclinés à  $45^\circ$  par rapport à la verticale. La hauteur maximale d'un talus vertical non soutenu est alors  $H_{c,Rankine} = 4c_u/\gamma$  ( $\gamma$ , poids volumique du sol). Tout talus vertical de hauteur supérieure doit être soutenu en exerçant un effort  $P_a = \frac{1}{2} \gamma H^2 - 2c_u H$ . Ce résultat peut être retrouvé par le calcul à la rupture en limitant la recherche à des blocs délimités par un segment de droite ( $\theta_{max} = 0$ ). En étendant la recherche à des arcs de spirale quelconque, le calcul à la rupture conduit à une valeur plus faible de la hauteur critique  $H_{c,rupture} = 3,83 c_u/\gamma$  pour un arc de spirale d'angle au centre ( $\theta_{max} = 30^\circ$ ).

Si on construit le diagramme des contraintes normales  $p$  à exercer sur le talus vertical, sous la profondeur  $H_{c,rupture}$  pour obtenir en tout point  $F = 1$  on obtient une distribution qui dépend à la fois du découpage et du choix de la valeur  $p$  adoptée en  $H_c$ . Cette distribution s'écarte de celle, triangulaire, fournie par le modèle de Rankine :  $p_{Rankine} = \gamma H - 2c_u$  qui n'est retrouvée que sous la double condition consistant à limiter la recherche à des spirales  $\theta_{max} = 0$  d'une part et à conduire une recherche algébrique de  $p$  depuis le sommet du talus d'autre part. Alors la pression  $p$  qui donne  $F = 1$  pour  $H < H_c$  est négative et représente un effort de « déconfinement du talus ». La pression  $p$  devient positive pour  $H > H_c$ . Ceci illustre le caractère peu physique et réducteur de la démarche par laquelle le modèle de Rankine peut être retrouvé. A l'inverse la démarche appuyée sur le calcul à la rupture, permettant de construire pas à pas, un profil de contrainte  $p$  tel que  $p$  soit nul

entre le sommet et  $H_c$  puis  $p = p(F=1)$  sous  $H_c$  paraît mieux pouvoir représenter le comportement du massif derrière le soutènement (Figure 3). On remarquera que la résultante  $P$  de la distribution complète obtenue est très proche de celle associée au modèle de Rankine. Ce résultat s'explique par le fait que les blocs critiques en pied du talus révèlent des valeurs  $\theta_{max}$  qui tendent vers 0, l'équilibre des moments devient un équilibre d'efforts et la résultante  $P$  tend vers la solution de Rankine.

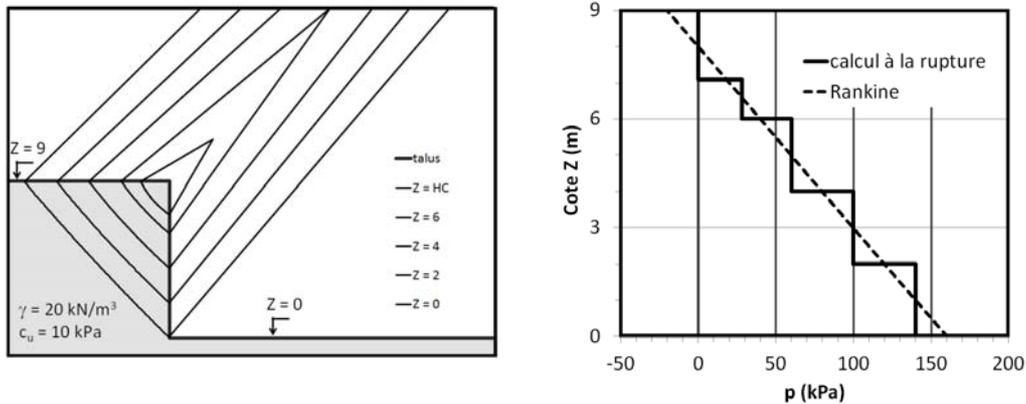


Figure 3. Mécanismes critiques et diagramme de poussée correspondant.

### 2.3. Prise en compte des talus

La norme écrans (NF-P 94-282) exclut l'utilisation des modèles élastiques pour représenter l'action d'un talus et suggère la méthode de Houy comme alternative (Figure 4 - gauche). Celle-ci consiste à définir les profondeurs  $z_1$  et  $z_2$  entre lesquelles la poussée (inclinaison  $\delta$ ) est interpolée linéairement entre la poussée d'inclinaison  $\delta$  sous un sol horizontal placé en pied du talus et celle sous un sol horizontal placé au sommet du talus. Dans le cas d'un sol frottant (angle  $\phi$ ) et d'un écran situé directement au pied ( $d_1 = 0$ ) d'un talus de grande largeur ( $d_2$  très grand) et de pente uniforme  $\beta$ , la construction du diagramme de poussée implique implicitement que le coefficient de poussée apparent  $k_a^*(\delta, \beta)$  est relié à celui sous une surface horizontale  $k_a(\delta, \beta = 0)$  par la relation suivante :

$$k_{a,houy}(\delta, \beta) = k_a(\delta, \beta = 0) (1 + \tan\beta/\tan\phi) \quad (1)$$

Cette géométrie particulière permet de comparer les valeurs  $k_a^*$  obtenues selon la méthode de Houy aux valeurs exactes trouvées dans les tables et également à celles qu'établit le calcul à la rupture selon la démarche déjà décrite (Figure 4 – droite).

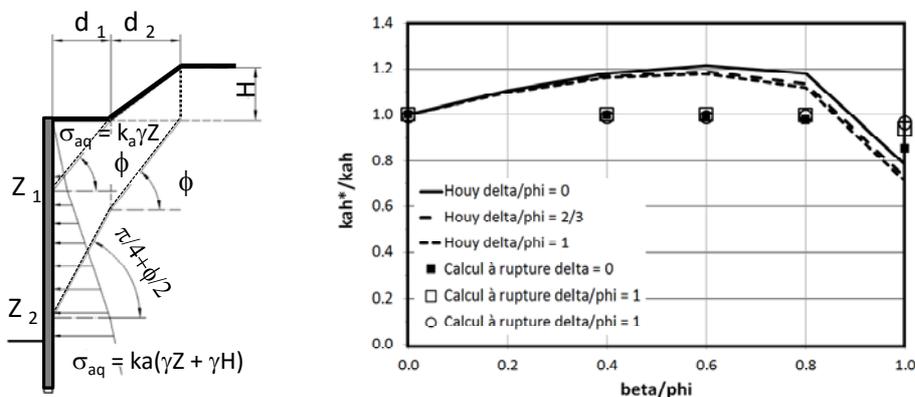


Figure 4. Coefficients de poussée sous un talus – Modèle de Houy (gauche), comparaison avec calcul à la rupture et les tables (à droite) –sol frottant ( $\phi = 30^\circ$ ).

Il apparaît que la composante horizontale du coefficient de poussée estimée selon Houy surestime de 20% les valeurs des tables jusqu'à des angles de talus représentant 0,8 fois l'angle  $\phi$  (la méthode est donc conservative) mais sous-estime la valeur exacte d'environ 30% au pied d'un talus en équilibre limite  $\beta = \phi$ . Par contraste, le calcul à rupture fournit des valeurs qui ne s'écartent pas de plus de 1 à 2% des valeurs des tables jusqu'à  $\beta = 0,8\phi$ , et de 15% maximum dans le cas extrême  $\beta = \phi$  et  $\delta = 0$ . Les valeurs du calcul à la rupture sont toutes par défaut, en accord avec l'approche par l'extérieur.

## 2.4. Effet d'une surcharge localisée sur le terrain

Le calcul à la rupture peut également servir d'outil pour intégrer l'effet d'une surcharge localisée sur le terrain aux diagrammes limites de poussée/butée. La puissance du calcul à la rupture réside dans sa capacité à traiter aisément de configurations quelconques de stratigraphie et de chargement sur le terrain. La figure 5 propose une comparaison avec les approches analytiques fournies dans la norme écrans (NF P 94 282 – Annexe D) et dérivées des théories d'élasticité et de plasticité (pour le cas d'un sol homogène).

Le calcul à la rupture établit un diagramme de poussée limite additionnelle  $\Delta p$  d'amplitude ( $\sim 0,31q$ ) et de résultante ( $\sim 0,58qB$ ) très voisines de celles issues de la théorie de plasticité. Il montre en revanche que l'effet de la surcharge intervient à partir d'une profondeur plus importante de la surface. On note par ailleurs que le recours à la théorie d'élasticité dans le cas étudié conduit à des résultats exagérément optimistes.

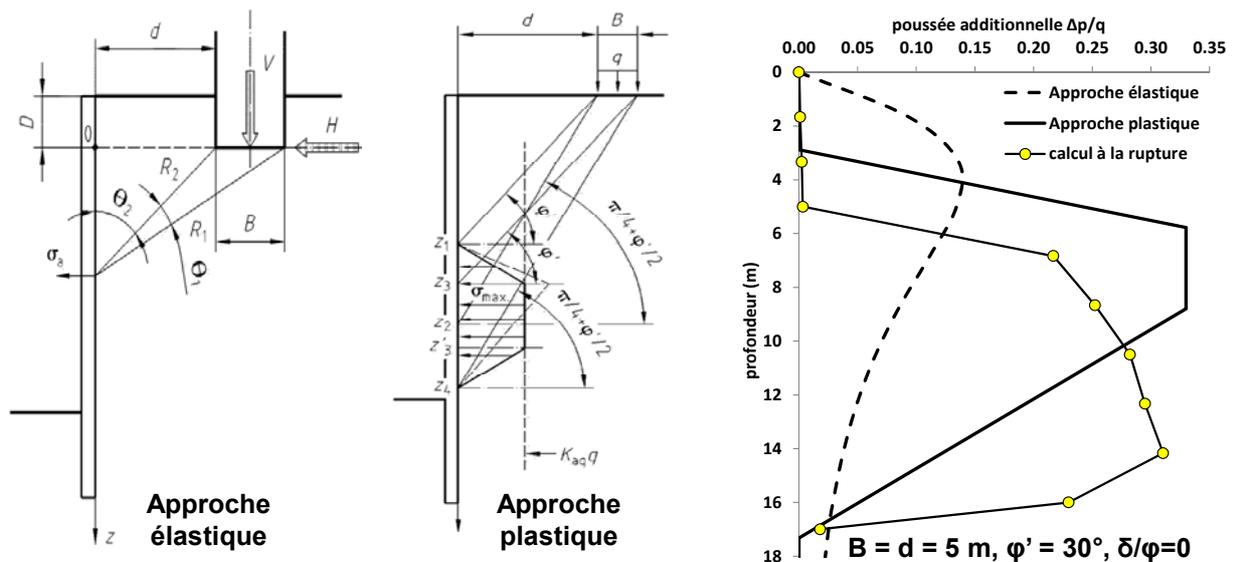


Figure 5. Butée sous une risberme – mécanismes critiques - comparaison au cas d'un sol

## 2.5. Butée sous une risberme

Des risbermes sont souvent aménagées au pied d'un soutènement dans l'objectif d'améliorer la butée mobilisable. Le calcul à la rupture permet d'évaluer la valeur limite de la butée, comme les valeurs  $p(z_i)$  d'une surcharge polygonale appliquée dans le plan de l'écran, telle que le coefficient de rupture soit égal à 1 à chacune des profondeurs  $z_i$ . L'exemple de la Figure 6 montre que le profil de butée issu du calcul à la rupture s'inscrit entre ceux associés à un sol horizontal placé au sommet ou au pied de la risberme.

Dans le cas particulier étudié, le diagramme est proche de celui qui serait obtenu en considérant le talus unique de même pente moyenne que la risberme ( $\beta = 16^\circ$ ) ; il se situe nettement sous celui calculé par l'approche élastique en assimilant la risberme à une surcharge négative de Boussinesq appliquée au niveau supérieur de la risberme. Le

calcul à la rupture constitue bien une méthode plus adaptée qui surmonte les insuffisances des modélisations de type élastique lorsque celles-ci sont utilisées pour représenter des talus ou des risbermes.

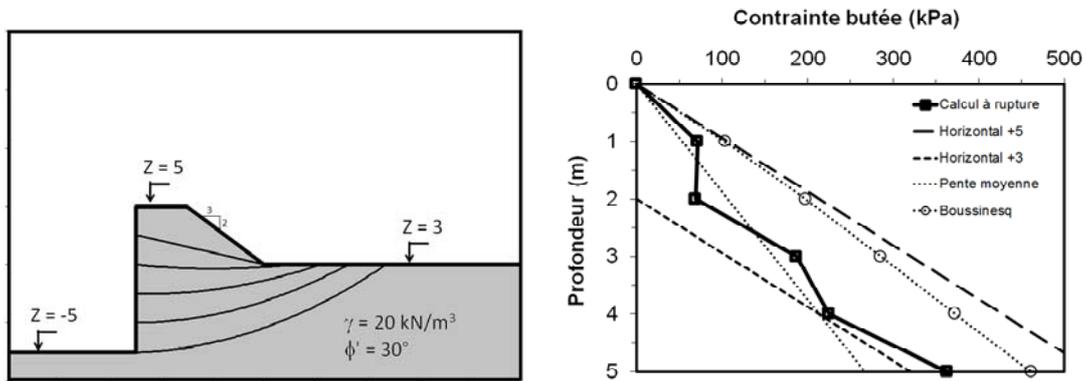


Figure 6. Butée sous une risberme – mécanismes critiques - comparaison au cas d'un sol horizontal, d'un sol incliné (pente moyenne) ou d'un calcul élastique.

## 2.6. Fouille renforcée par inclusions

On étudie le cas d'un écran de palplanches fiché dans un sol limoneux renforcé par inclusions métalliques. Les inclusions sont supposées travailler exclusivement en cisaillement. La démarche présentée précédemment pour l'évaluation de la butée limite à l'aide du calcul à la rupture peut être reconduite ici en intégrant les termes résistants apportés par les inclusions. L'évaluation de ces termes résistants pour chaque mécanisme examiné se base sur la méthode dite du « multi-critère » (Schlosser, 1982).

La Figure 7 présente le résultat obtenu et illustre l'effet bénéfique du renforcement par inclusions qui se reflète dans l'augmentation de la butée limite disponible sur la hauteur de la fiche. L'amélioration de la butée limite a une conséquence directe sur la limitation des déformations et des sollicitations comme l'illustre l'analyse de l'équilibre local de l'écran par un modèle aux coefficients de réaction (Figure 7 – centre et droite).

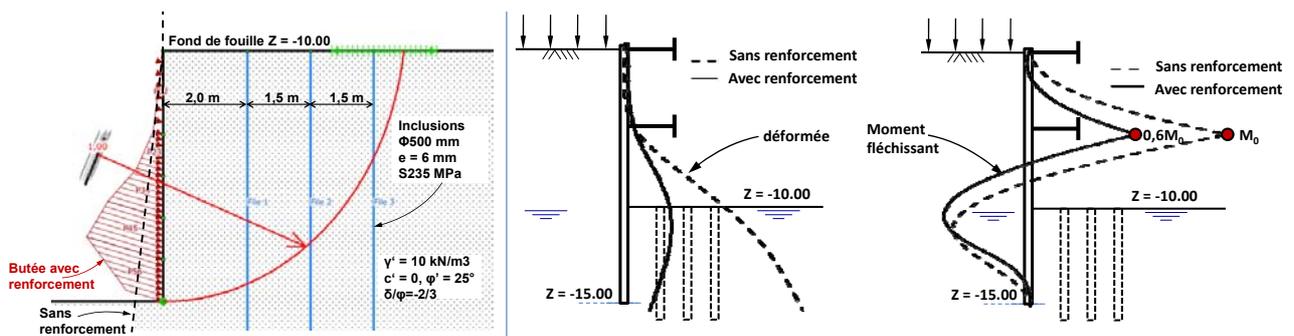


Figure 7. Calcul d'une fouille renforcée par inclusions rigides – Calage de la butée limite (gauche) – déformée de l'écran (centre) – sollicitations dans l'écran (droite)

## 2.7. Influence de conditions hydrauliques spécifiques

La situation est celle d'un rideau de palplanche situé sous un quai de type danois. Le talus surmontant l'écran est soumis au marnage : il est découvert à marée basse et immergé à marée haute (Figure 8). Dans le sol peu perméable et déformable (alluvions argileuses) les pressions interstitielles ne peuvent pas suivre les variations du niveau imposées par le marnage. Ces conditions transitoires peuvent être décrites en écrivant que la variation de pression  $\Delta u$  par rapport à la situation haute est égale en tout point du

massif à la variation de la contrainte verticale sur la même verticale. Le calage par un calcul à la rupture du coefficient de poussée effective conduit aux résultats de la figure 8.

Le coefficient de poussée effective associé à la situation de marnage ( $k_a^* = 0,84$ ) est nettement plus élevé que celui obtenu en supposant le talus complètement immergé dans une nappe au repos ( $k_a^* = 0,40$ ) ou le talus complètement dégagé jusqu'au sommet de l'écran ( $k_a^* = 0,51$ ). Cet exemple montre que le régime de pressions transitoires à marée basse dans le talus surmontant l'écran peut majorer par un facteur 2 le diagramme de poussée sur l'écran, par rapport aux situations où la nappe est supposée statique.

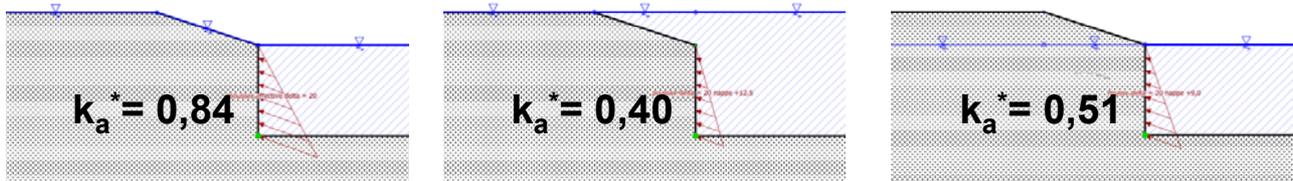


Figure 8. Coefficients de poussée effective sur un écran placé en pied d'un talus soumis à la marée (Sol  $c' = 0$ ,  $\phi' = 30^\circ$ ,  $\delta/\phi' = 2/3$ , hauteur talus 3,3 m, hauteur écran 9 m).

## 2.8. Poussées des terres dynamiques

La démarche de calage des diagrammes de poussée/butée par le calcul à la rupture peut être menée en conditions sismiques quand celles-ci sont traitées d'une manière pseudo-statique (Figure 9 – droite). Cela permet d'aller bien au-delà du domaine de validité des modèles analytiques usuels tels que celui de Mononobe-Okabe (Okabe, 1924), qui n'est autre que la généralisation du coin de Coulomb tenant compte de forces d'inertie  $F_H$  et  $F_V$  (Figure 9 – gauche). Bien que la formulation courante de ce modèle soit restreinte au cas d'un sol frottant, il est aisé de réintégrer le problème tenant compte du terme de cohésion comme cela a avait été présenté dans la publication originale d'Okabe (1924). Le tableau 2 présente le résultat d'une comparaison menée dans le cas d'un terrain homogène soumis à un séisme caractérisé par  $k_h = a_h/g = 0,3$  et  $k_v = 0$ .

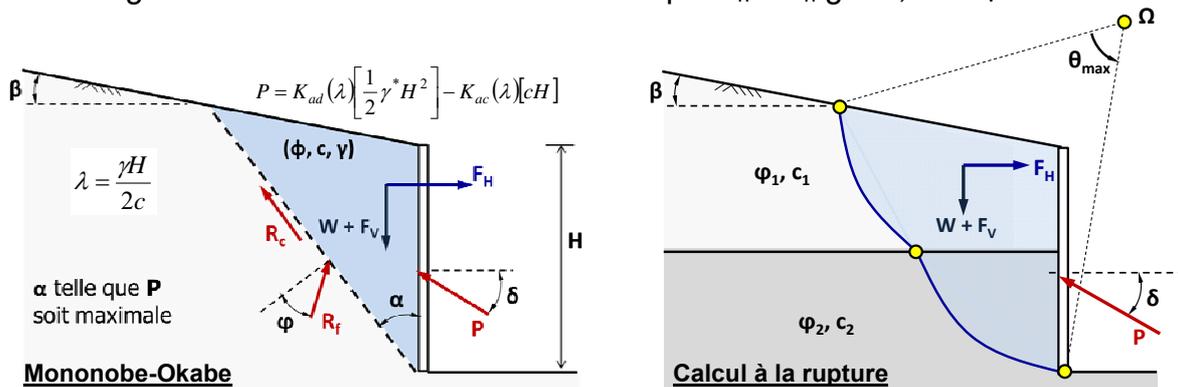


Figure 9. Principe du modèle de Mononobe-Okabe (gauche) vs Calcul à la rupture (droite)

Tableau 2. Comparaison entre Mononobe-Okabe et Calcul à la rupture – sol homogène

$\phi'$ ( $^\circ$ )	pente talus ( $^\circ$ )	cohésion (kPa)	Mononobe- Okabe	Calcul à la rupture cinématique plane	Calcul à la rupture arcs de spirale
30	0	0	570 kN/ml	570 kN/ml	575 kN/ml (+01%)
30	0	20	305 kN/ml	305 kN/ml	310 kN/ml (+02%)
30	16	20	450 kN/ml	450 kN/ml	500 kN/ml (+11%)
0	0	50	368 kN/ml	368 kN/ml	450 kN/ml (+22%)

Le tableau 2 montre que le modèle de Mononobe-Okabe conduit à des résultats strictement identiques à ceux d'un calcul à la rupture restreint à des cinématiques planes ( $\theta_{\max} = 0$ ), ce qui correspond à l'hypothèse implicitement introduite dans le problème de Coulomb. Une telle hypothèse conduit en revanche à des résultats exagérément optimistes lorsque le terme de cohésion devient prédominant avec une sous-estimation de la poussée dynamique de plus de 20% par rapport à un modèle plus élaboré explorant des cinématiques en arcs de spirale. Ce constat est corroboré par l'exemple de la figure 10 où l'on s'intéresse à la poussée dynamique à l'arrière d'un mur soutenant un terrain hétérogène. La formation superficielle du site est supposée obéir à un comportement non drainé sous séisme. La mise en œuvre du calcul à la rupture avec des mécanismes en arcs de spirale conduit à une poussée dynamique résultante de l'ordre de 980 kN/ml, une valeur 1,50 fois supérieure à celle issue d'un calcul restreint à des cinématiques planes.

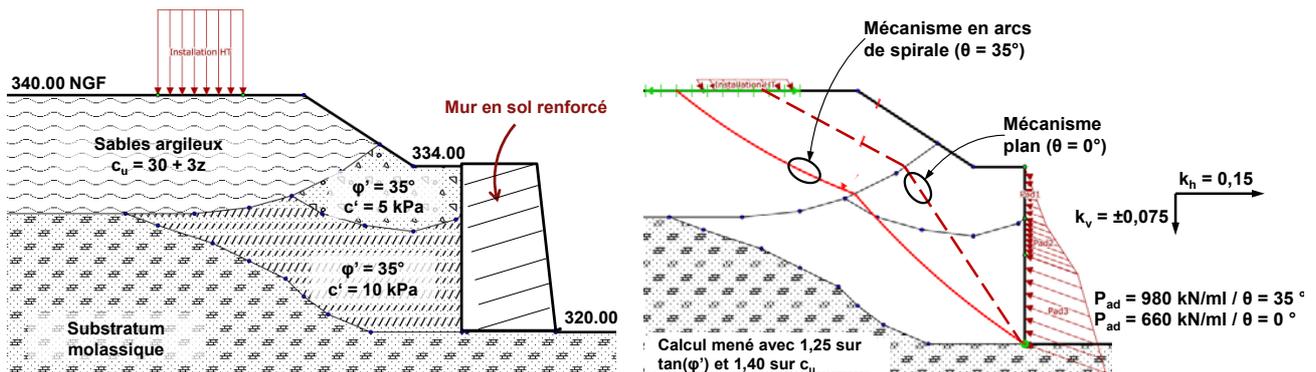


Figure 10. Poussée dynamique à l'arrière d'un mur soutenant un terrain hétérogène

### 3. Conclusions

L'approche cinématique du calcul à la rupture établit le caractère parfois pessimiste, mais aussi parfois non sécuritaire de certains schémas de calcul des états limites de poussée et butée, couramment utilisés pour le calcul des écrans. Au-delà d'être une référence solide pour juger de la validité de ces schémas, la méthode a vocation à pouvoir élaborer les solutions applicables lorsque les sols ne sont pas homogènes.

### 4. Références bibliographiques

- Coussy O., Salençon J. (1979) Analyse de la stabilité des ouvrages en terre par le calcul à la rupture *Annales des Ponts et Chaussées, 4e trimestre 1979.*
- Cuira F. (2015) Apports de l'ingénierie géotechnique dans la conception parasismique des ouvrages – 9<sup>e</sup> Colloque national de l'AFPS – Marne-la-Vallée.
- Kerisel J., Absi E. (2003) Tables de poussée et de butée des terres. *Presses de l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, Paris.*
- Okabe, S. (1924): General theory on earth pressure and seismic stability of retaining wall and dam. *Journal of the Japan Society of Civil Engineering 10:6, 1277-1323.*
- Salençon J. (1983) Calcul à la rupture et analyse limite. *Presses de l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, Paris.*
- Schlosser F. (1982) Behavior and design of soil nailing. *Proc. of Symposium on Recent Developments in Ground Improvement Techniques, Bangkok, pp. 399-413.*
- Simon B. (2006) Applications du calcul à la rupture aux ouvrages de soutènements. *Compte-rendu Symposium international ELU – ULS, LCPC, Paris.*