

ANALYSE ADAPTATIVE DE LA RÉPONSE DYNAMIQUE DES POUTRES INFINIES

ADAPTIVE ANALYSIS OF DYNAMIC RESPONSE OF INFINITE BEAMS

Reda Mezeh^{1,2}, Marwan Sadek¹, Fadi Hage Chehade², Ahmed Arab³, Isam Shahrouf¹

¹ Laboratoire Génie Civil et géo-Environnement (LGCgE), Université Lille 1 Sciences et Technologies, Villeneuve d'Ascq 59655, France

² Ecole Doctorale des Sciences et Technologies, Centre de Modélisation, Beyrouth, Liban

³ Laboratoire de Sciences des matériaux et environnement, Université Hassiba Ben BouAli, Chlef, Algérie

RÉSUMÉ – Cette communication présente un schéma numérique adaptatif en éléments finis pour prédire les vibrations induites dans les poutres infinies soumises à des charges mobiles. Le schéma de calcul proposé est appliqué pour simuler le mouvement uniforme d'une charge harmonique. Les résultats obtenus montrent une forte efficacité de la méthode numérique proposée pour l'analyse des vibrations générées.

ABSTRACT – This paper present an adaptive finite element scheme to predict the induced vibrations in the infinite beams subjected to moving loads. The proposed computational scheme is applied to simulate the uniform motion of harmonic load. The obtained results show a high efficiency of the proposed numerical method for the analysis of the generated vibrations.

1. Introduction

Dans le développement urbain actuel les transports constituent une des clés de l'organisation de nos villes. Parmi les modes de transport existants, le transport ferroviaire permet de disposer de réseaux fiables et réguliers. Malheureusement ce mode de transport utilise des machines qui génèrent des vibrations significatives surtout après l'usure des voies ferrées. Bien que les niveaux vibratoires engendrés ne représentent généralement pas de danger pour les structures riveraines, ils peuvent être suffisamment élevés dans les bâtiments pour gêner les habitants.

En vertu de la pertinence dans l'analyse et la conception des voies ferrées, la réponse dynamique des poutres reposant sur fondation élastique et soumises à des charges mobiles a été largement étudiée. Dans ce contexte, beaucoup des méthodes analytiques ont été proposées par nombreux chercheurs. (Timoshenko et al., 1974) ont résolu le problème des vibrations libre des poutres sur fondation élastique. (Ono et Yamada, 1989) ont développé des formules analytiques conçues pour estimer les amplitudes des vibrations générées par les voies ferrées grâce aux défauts géométriques au niveau de la roue ou du rail. Cependant, pour des problèmes plus complexes qui se rapprochent plus à la réalité, des méthodes numériques doivent être utilisées.

La méthode des éléments finis MEF est une méthode bien établie pour résoudre des problèmes complexes, y compris le cas des charges mobiles. A noter que cette méthode a été appliquée pour la première fois au problème des charges mobiles par (Yoshida et Weaver, 1971). Elle a depuis été utilisée par de nombreux autres chercheurs. (Yokoyama, 1991) a mis au point une procédure numérique se basant sur la MEF pour étudier la vibration d'une poutre uniforme de Timoshenko reposant sur fondation élastique. (Thambiratnam et Zhuge, 1996) ont utilisé le schéma d'intégration de Newmark

afin de trouver l'influence de la vitesse des charges et de la rigidité de fondation sur l'amplification dynamique d'une poutre sur appuis élastiques.

En traitant des problèmes des charges mobiles, la MEF rencontre des difficultés lorsque la charge se déplace à grande vitesse, parfois ces difficultés peuvent être surmontées par le raffinement du maillage ; mais cela provoque une augmentation significative du temps de calcul. Comme une tentative pour franchir ces complications, (Krenk et al., 1999) ont proposé l'utilisation de la MEF en un système de coordonnées mobile pour obtenir la réponse d'un demi-espace élastique soumis à une charge mobile. (Koh et al., 2007) ont adopté l'idée des coordonnées mobiles pour résoudre le problème d'interaction Train à Grande vitesse-Voie Ferrée, et ont nommé l'algorithme numérique : « Méthode des éléments mobiles MEM ». Cette méthode a été ensuite appliquée à l'analyse des charges mobiles sur un demi-espace viscoélastique par (Tran et al., 2014).

Dans cette communication, le problème de convection notamment d'une charge harmonique, le long une poutre infinie d'Euler reposant sur une couche viscoélastique, a été traité par une nouvelle approche numérique. En adoptant un maillage spatio-temporel approprié, le système numérique qui en résulte a été résolu par un algorithme adaptatif. Un exemple montrant les principaux enjeux influençant le comportement dynamique du système est présenté.

2. Formulation mathématique

Le système dynamique est constitué d'une charge harmonique $P(t)$ traversant une poutre-rail dans la direction X^+ avec une vitesse constante V . L'origine de l'axe fixe X est localisée au centre de la poutre de façon que la charge soit à $X=0$ lorsque $t=0$. La poutre infinie qui obéit à la théorie d'Euler-Bernoulli, ayant une rigidité constante à la flexion EI , et une masse par unité de longueur m . La couche viscoélastique comprend une série infinie, rapprochée et indépendante des unités ressort k -amortisseur c de Kelvin-Voigt. La figure 1 montre le modèle vibratoire de la poutre infinie.

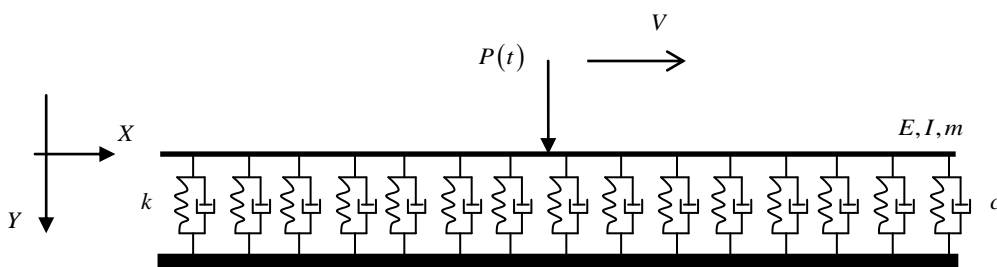


Figure 1. Modèle vibratoire de la poutre infinie.

La charge est considérée d'être variable selon la loi suivante :

$$P(t) = P_0 e^{-i\omega t} \quad (1)$$

Où P_0 représente l'amplitude et ω la fréquence angulaire de la charge harmonique.

Pour un choix raisonnable des paramètres, on définit les valeurs critiques de vitesse V_0 , de fréquence ω_0 et de l'amortissement visqueux C_0 comme suit :

$$V_0 = m^{-1/2} (EI k)^{1/4} \quad (2)$$

$$\omega_0 = m^{-1/2} k^{1/2} \quad (3)$$

$$C_0 = 2(mk)^{1/2} \quad (4)$$

Les simulations numériques sont réalisées sur des structures linéaires dont la solution analytique peut être trouvée pour toutes les vitesses et les fréquences. Cela nous permet d'évaluer la précision de la méthode numérique proposée.

2.1. Equation dynamique de la poutre

Le déplacement vertical et la rotation de la poutre sont désignés par u et θ respectivement. L'équation du mouvement exprimée dans le repère spatiale fixe (X,Y) d'une poutre soumise à une charge mobile est donnée comme suit (Tran et al., 2014) :

$$EI \frac{\partial^4 u}{\partial X^4} + ku + c \frac{\partial u}{\partial t} + m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -P(t, X) \delta(X - Vt) \quad (5)$$

Où t représente le temps, et δ la fonction delta-Dirac.

En se basant sur la solution analytique de (Andersen et al., 2001) le champ de déplacement de la poutre exprimé dans le référence mobile (x,y) lié à la charge est le suivant :

$$u_a(x, t) = \begin{cases} A_1 e^{-a_1 x + i(b_1 x - \omega t)} + A_2 e^{-a_2 x + i(b_2 x - \omega t)}, & x \geq 0 \\ A_3 e^{-a_3 x + i(b_3 x - \omega t)} + A_4 e^{-a_4 x + i(b_4 x - \omega t)}, & x < 0 \end{cases} \quad (6)$$

Où les A_j sont des constantes à déterminer en utilisant les conditions de continuité au niveau de déplacement et des sollicitations ; cela se traduit mathématiquement par l'équation 7. a_j et b_j sont respectivement les parties réelle et imaginaire du nombre d'ondes Z_j , dont a_j représente la propagation et b_j l'atténuation de la $j^{\text{ème}}$ composante des ondes propagées.

$$A_1 \eta_1^{l-1} + A_2 \eta_2^{l-1} - A_3 \eta_3^{l-1} - A_4 \eta_4^{l-1} = P_0 (EI)^{-1} \delta(4-l); \quad 1 \leq l \leq 4 \quad (7)$$

$$\eta_j = -b_j + ia_j; \quad i = \sqrt{-1} \quad (8)$$

2.2. Méthodologie de résolution numérique

Une nouvelle approche numérique est proposée pour trouver la réponse dynamique d'une poutre infinie soumise à des charges mobiles, dont son idée principale consiste à faire déplacer la poutre tout en fixant la position des charges. Dans ce qui suit, on raisonne dans une référence spatiale attachée au système couplé charge-poutre.

Après avoir discrétisé la poutre mobile en éléments finis ; l'équation différentielle qui gouverne un élément finis typique de longueur L_e (équation 5) est multipliée par une fonction arbitraire de pondération puis intégrée sur la longueur de l'élément. En adoptant l'approche de Galerkin, les matrices élémentaires de masse M_e , d'amortissement C_e et de rigidité K_e sont données dans la référence liée au système poutre mobile-charge de la façon suivante :

$$M_e = m \int_0^{L_e} H^T H dr \quad (9)$$

$$C_e = c \int_0^{L_e} H^T H dr \quad (10)$$

$$K_e = EI \int_0^{L_e} \left(\frac{\partial^2 H}{\partial r^2} \right)^T \frac{\partial^2 H}{\partial r^2} dr + k \int_0^{L_e} H^T H dr \quad (11)$$

Il est courant d'utiliser la matrice d'interpolation H basée sur les polynômes cubiques d'Hermite. r désigne l'axe de coordonné local de l'élément finis.

Après avoir assemblé les matrices individuelles des éléments par rapport à leur position sur la poutre, l'équation dynamique globale du système peut être écrite de la façon suivante :

$$[M]\{\ddot{u}\} + [C]\{\dot{u}\} + [K]\{u\} = \{Q\} \quad (12)$$

Où [M], [C] et [K] sont respectivement les matrices globales de masse, amortissement et rigidité du système dynamique. {u} et {Q} désignent respectivement le vecteur de déplacement et des charges ramenées aux nœuds.

En adoptant un maillage temporel approprié, la résolution de l'équation globale du mouvement (équation 12) est proposée d'être sur des petits intervalles du temps, à partir duquel on considère le problème spatio-temporel comme étant un problème découplé des charges stationnaires avec amplitude variable. Pour tenir compte du mouvement des charges le long de la poutre, il est proposé d'injecter après chaque pas temporel une nouvelle condition initiale basée sur l'interpolation polynomiale de Hermite. D'où l'aspect adaptatif de la méthode proposée. La figure 2 montre l'organigramme du schéma numérique implicite utilisé dans la résolution du système des équations différentielles linéaires. A noter que les matrices [A], [B] et [C] sont données de la façon suivante :

$$A = \left[\frac{1}{\alpha dt^2} M + \frac{\delta}{\alpha dt} C + K \right] \quad (13)$$

$$B = \begin{bmatrix} - \left[\frac{1}{\alpha dt^2} M + \frac{\delta}{\alpha dt} C \right] \\ - \left[\frac{1}{\alpha dt} M + \left(\frac{\delta}{\alpha} - 1 \right) C \right] \\ - \left[\left(\frac{1}{2\alpha} - 1 \right) M + dt \left(\frac{\delta}{2\alpha} - 1 \right) C \right] \end{bmatrix}^T \quad (14)$$

$${}^t C = \left\{ {}^t \{u\} \quad {}^t \{\dot{u}\} \quad {}^t \{\ddot{u}\} \right\}^T \quad (15)$$

Où α et δ sont les coefficients de Newmark, dt est un pas du temps infinitésimal.

3. Résultats numérique

Pour montrer l'efficacité de la méthode proposée à résoudre les problèmes dynamiques où les charges qui excitent le système sont à la fois variable dans le temps et dans l'espace, une poutre finie de longueur L est modélisée, et l'intégration numérique a été effectuée sur un intervalle du temps $T_T=100T$, où T dénote la période de la charge

excitatrice. On traite ici le cas de la voie ferrée Européen dont ces caractéristiques mécaniques sont présentées par (MEZEH et al., 2015).

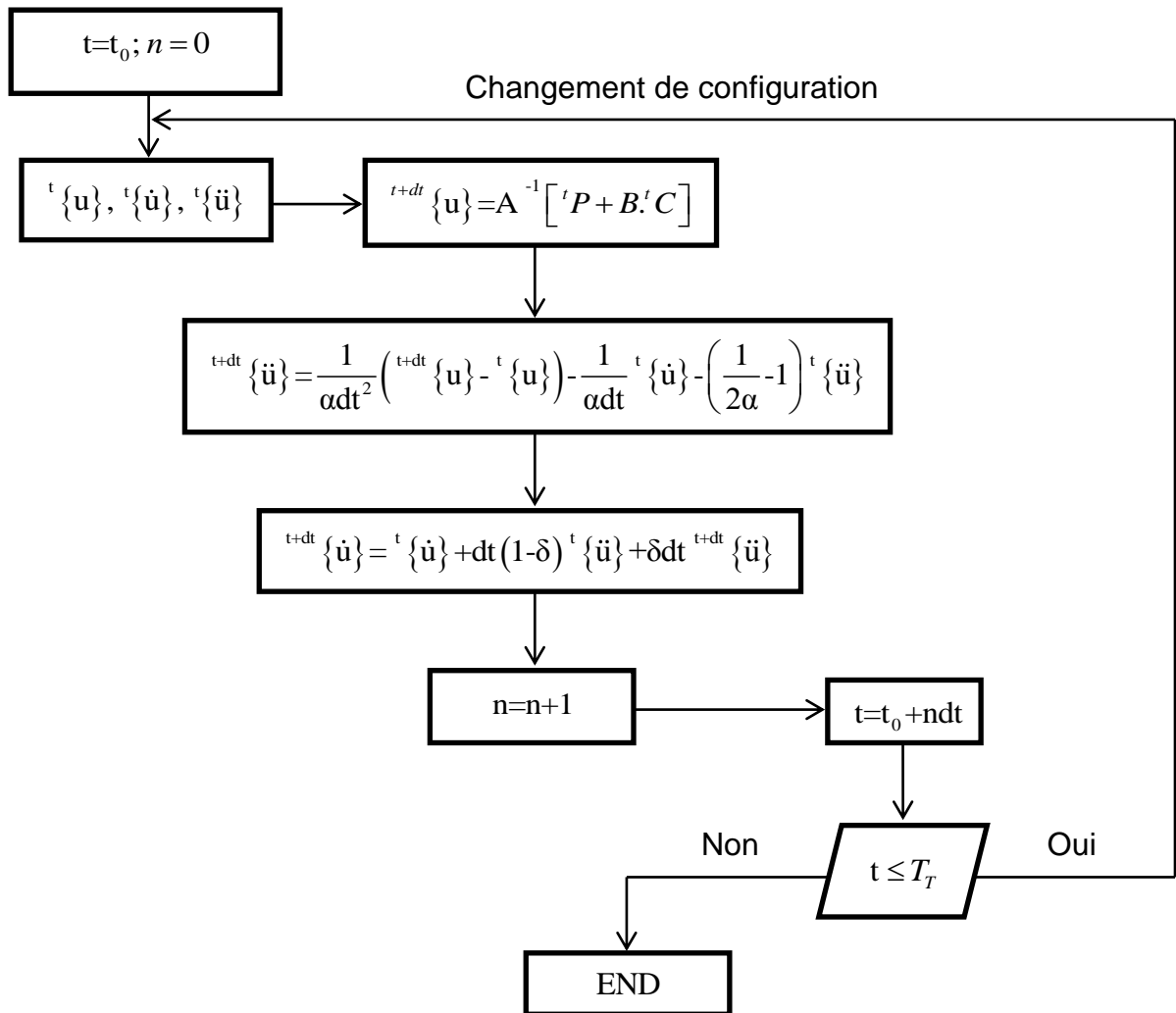


Figure 2. Organigramme du schéma implicite proposé.

La réponse dynamique d'une poutre-rail de longueur $L=150$ m suite au passage d'une charge harmonique $P=40\sin(-2\omega_0 t)$ [KN] avec une vitesse constante $V=0.5V_0$ est simulée au moyen de l'approche proposée. En second temps, les résultats numériques ont été comparés avec la solution analytique (équation 6). La poutre a été maillée via des éléments finis de longueur 0.3 m au centre qui augmente progressivement pour atteindre 1 m aux bords du domaine. Les figures 3(a) et 3(b) montrent la réponse dynamique au point de contact sur l'interface mobile charge-poutre exprimée sur l'axe temporel et fréquentiel respectivement. Les résultats montrent que la solution numérique correspond fortement à la solution analytique du système différentiel. D'autre part, ces figures montrent que la solution analytique est stationnaire alors que la réponse fournie par la méthode numérique donne lieu à une partie transitoire qui se termine après 5 à 8 périodes de chargement. La figure 3(b) montre le contenu fréquentiel de la réponse de la poutre qui présente deux pics, le premier correspond à la fréquence propre du rail et l'autre à la fréquence de chargement.

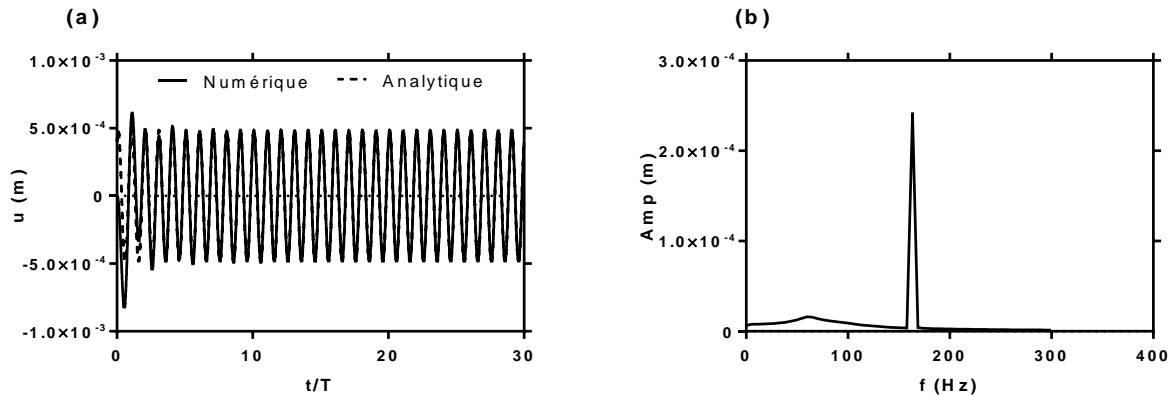


Figure 3. Réponse de la poutre-rail (a) sur l'axe temporel (b) sur l'axe fréquentiel ($V=0.5V_0$, $P_0=40\text{ KN}$, $\omega=2\omega_0$).

La figure 4(a) présente la configuration de la poutre-rail après 20 périodes du chargement trouvée numériquement et analytiquement. Les deux solutions se coincident sur la totalité de la travée. Cela montre une autre fois l'efficacité de la méthode numérique proposée. La figure 4(b) présente la propagation de l'erreur relative calculée au point d'application de la charge en fonction du temps. Une forte convergence du schéma adaptatif peut être déduite de cette figure.

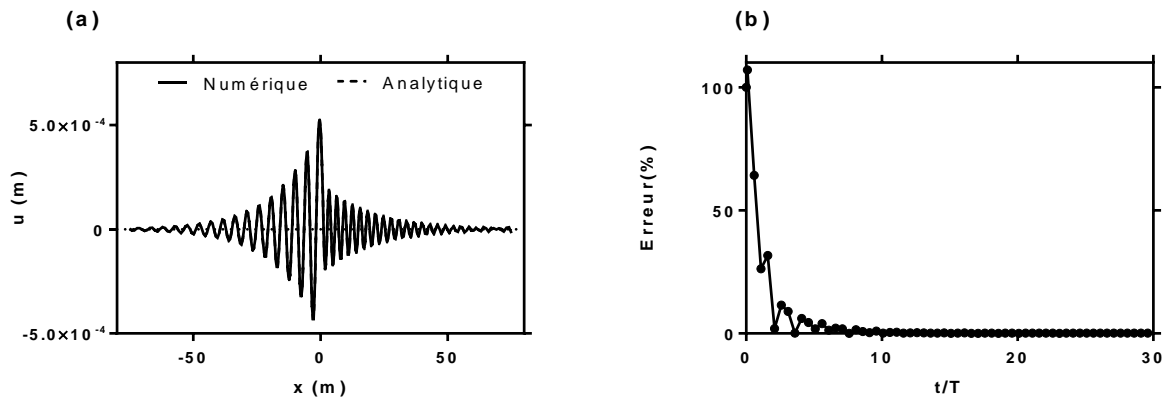


Figure 4. (a) Configuration de la poutre-rail ($t=20T$) ; (b) Propagation d'erreur au centre ($V=0.5V_0$, $P_0=40\text{ KN}$, $\omega=2\omega_0$).

4. Conclusions

Cette communication a présenté un modèle numérique pour la simulation des interactions dynamiques entre les charges harmoniques mobiles et la poutre infinie qui modélise une voie ferroviaire au moyen d'un aspect adaptatif de la méthode des éléments finis. La vitesse de passage de la charge a été prise avec une valeur élevée, comparable avec la vitesse critique d'une poutre qui se repose sur fondations viscoélastiques. L'efficacité et la convergence du schéma numérique ont été démontrées.

5. Références bibliographiques

- Andersen L., Nielsen S.R.K., Kirkegaard P.H. (2001). Finite element modeling of infinite Euler beams on Kelvin foundations exposed to moving loads in convected coordinates. *Journal of sound and vibration* 241(4), pp. 587-604.
- Connolly D.P., Kouroussis G., Woodward P.K., Alves Costa P., Verlinden O., Forde M.C. (2014). Field testing and analysis of high speed rail vibrations. *Soil dynamics and earthquake engineering* 67, pp. 102-118.
- Krenk S., Kellezi L., Nielson S.R.K., Kirkegaard P.H. (1999). Finite elements and transmitting boundary conditions for moving loads. *Proceedings, 4th European conference on structural dynamics- EURODYN'99*, pp. 447-452.
- Koh C.G., Chiew G.H., Lim C.C. (2007). A numerical method for moving load on continuum. *Journal of sound and vibration* 300, pp. 126-138.
- Mezeh R., Sadek M., Hage Chehade F., Abdelmassih D., Makhoul N. and Younes A. (2015). Vibration analysis of high-speed rail system using the moving element method. *Proceedings, 5th International conference on computational methods in structural dynamics and earthquake engineering, vol. 2*, pp. 2951-2960.
- Ono K. and Yamada M. (1989). Analysis of railway track vibration. *Journal of sound and vibration* 130, pp. 269-297.
- Timoshenko S., Young D.H. and Weaver W. (1974). Vibration problems in engineering. *New York: John Wiley; fourth edition*.
- Thambiratnam D., Zhuge Y. (1996). Dynamic analysis of beams on an elastic foundation subjected to moving loads. *Journal of sound and vibration* 198, pp. 149–169.
- Tran M.T., Ang K.K., Luong V.H. (2014). Vertical dynamic response of non-uniform motion of high-speed rails. *Journal of sound and vibration* 333, pp. 5427-5442.
- Yoshida D.M. and Weaver W. (1971). Finite element analysis of beams and plates with moving loads. *Publication of international association for bridge and structural engineering* 31(1), pp. 179-195.
- Yokoyama T. (1991). Vibrations of Timoshenko beam-columns on two-parameter elastic foundations. *Earthquake engineering & structural dynamics, vol. 20, n°4*, pp. 355-370.