

PREMICES DU DIMENSIONNEMENT GEOTECHNIQUE

EARLY BEGINNINGS OF GEOTECHNICAL DESIGN

Jean-David VERNHES¹, Bassam BARAKAT²

¹ Institut Polytechnique LaSalle, Beauvais, France

² Institut Polytechnique LaSalle, Beauvais, France

RÉSUMÉ – En 1729, Bélidor, professeur du Génie, publie à Paris « *La Science des Ingénieurs* ». Pour la première fois en géotechnique, un modèle de dimensionnement physiquement pertinent est utilisé, pour résoudre un problème de taille : l'évaluation de la sécurité des murs de soutènement du Profil général de Vauban (1684). Coulomb (1773) l'ignore. C'est seulement avec Rankine (1856) que le paradigme de Bélidor réapparaît.

ABSTRACT – In 1729, the military academy professor B. F. de Bélidor brought out in Paris « *La Science des Ingénieurs* ». For the first time in geotechnics, a physically sound design model was used, to address a major issue: the safety assessment of Vauban's normative table for retaining walls (1684). Coulomb (1773) did not take any notice of it. Only with Rankine (1856) did Belidor's paradigm reappear.

1. Introduction

Dans leur article intitulé « *Pour l'enseignement de l'histoire de la géotechnique* » (2000), M. Gambin et J.-P. Magnan ont souligné l'importance de prendre en considération le passé de la géotechnique afin de susciter l'intérêt des étudiants pour cette activité. Coupées des questionnements et des contingences qui les ont vu naître, les théories à transmettre pourraient perdre de leur intelligibilité voire passer pour arbitraires.

La géotechnique a une existence immémoriale comme pratique associée à l'art de construire. Ce n'est que progressivement qu'elle est aussi devenue une science. Différents auteurs (Kérisel, 1956 et 1993 ; Verdeyen et al., 1968 ; Habib, 1991 ; Bordes, 2000) s'accordent à dire que, peu ou prou, deux noms de grande notoriété incarnent les débuts : S. L. de Vauban (1633-1707) et C. A. Coulomb (1736-1806), tous deux ingénieurs ayant servi dans l'arme du Génie, reçus à l'Académie des Sciences en 1699 (Virol, 2003) et 1781 respectivement. Leurs contributions à la géotechnique en tant que science ne sont cependant pas à mettre sur le même plan. Vauban est l'auteur d'un Profil général pour les murs de soutènement (1667 ou 1684 ? - l'original est perdu) qui relève encore des principes de proportionnalité et d'expérience pratiqués depuis l'Antiquité puisqu'il n'a aucune justification physique. Coulomb est le premier à donner un critère, encore valable aujourd'hui, exprimant la résistance au cisaillement d'un corps en distinguant frottement interne et cimentation/cohésion (Coulomb, 1773). Il l'applique aussitôt au dimensionnement d'un pilier de maçonnerie, puis d'un mur de soutènement en considérant les terres comme un coin solide relevant de son critère.

Puisque Vauban ne l'est pas, Coulomb est-il le premier de l'histoire de la géotechnique à dimensionner un ouvrage ? En 1985, Kérisel et d'autre part Skempton ont fait des années 1700 et 1717 des dates charnières. Kérisel (1956, 1993) cite pour cette époque Bullet (1691), Buchotte (1716), Gauthier (1717), Couplet (1726) et Bélidor (1729). La rétrospective de Verdeyen *et al.* (1968) met singulièrement en avant Bélidor, avec des détails sur son modèle physique et un « *semble-t-il* » coefficient de sécurité de 1,25.

2. Bernard Forest de Bélidor (1698-1761), ses ouvrages, celui de 1729

De nombreux détails de la vie de Bélidor nous sont donnés par Navier en 1813 (Fig. 1) dans la première réédition de la *Science des Ingénieurs*. Sa biographie sur le site internet de la géotechnique francophone en donne un bon résumé (CFMS, non daté).

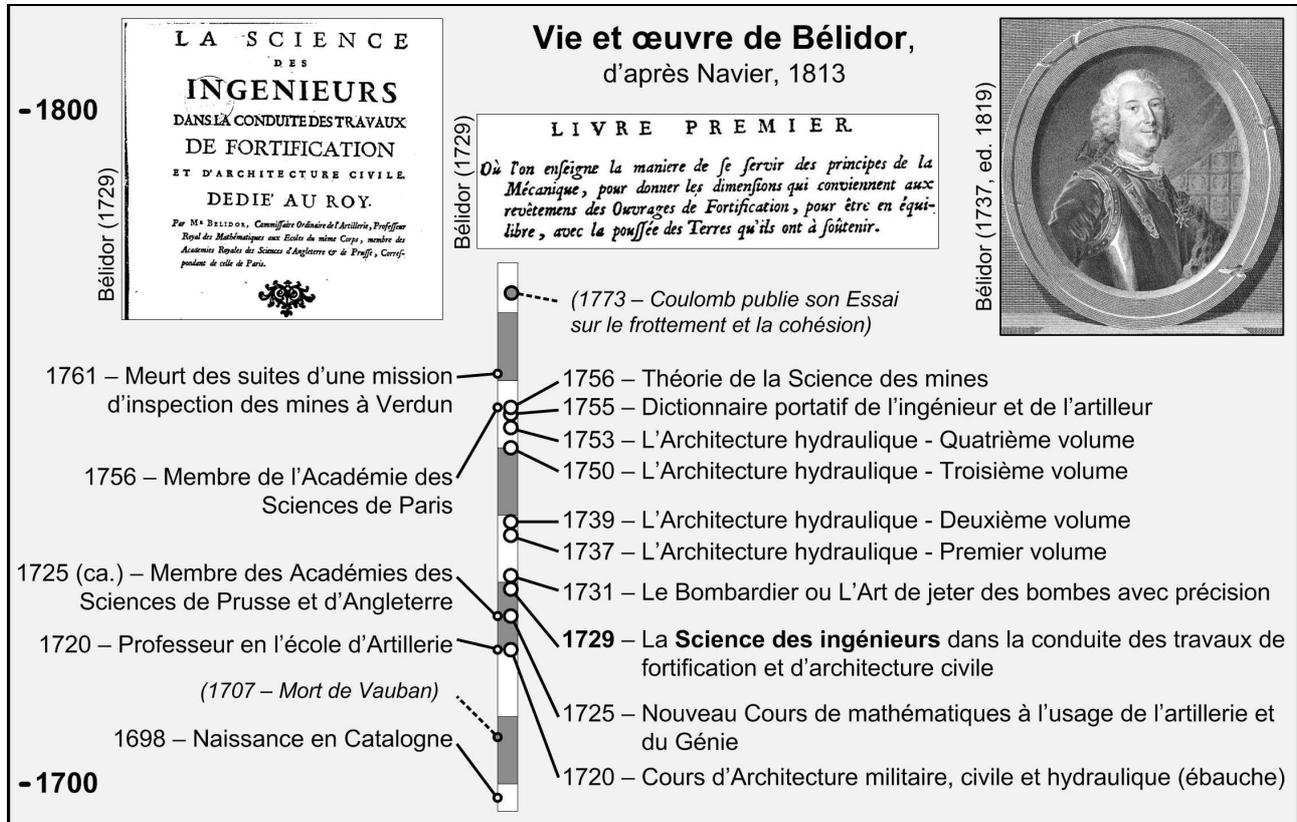


Figure 1. Grandes dates de la vie et de l'œuvre de Bélidor

Comme auteur, Bélidor a abordé et trouvé des solutions à un grand nombre de questions qui étaient posées aux ingénieurs du temps de Louis XV. Son ouvrage de 1729 est le premier de ses écrits majeurs, mais dans l'ombre de l'Architecture Hydraulique, œuvre de maturité. La Science des Ingénieurs connut un grand succès à sa parution, y compris à l'étranger. Elle fut rééditée pour la première fois par Navier en 1813, la seconde en 1830.

La principale motivation de Bélidor au commencement de cet ouvrage est de savoir si les murs de Vauban sont inutilement dépensiers (surdimensionnés) ou au contraire vulnérables (sous-dimensionnés), et ce en le *démontrant* par un principe physique incontestable. Il fonde sa démarche sur le principe du bras de levier.

3. Une lecture synthétique de la *Science des ingénieurs*, 1729, Livre I

3.1. Organisation

La *Science des ingénieurs* est composée de six livres portant sur tous les thèmes de la construction militaire et par extension civile : structures, matériaux, organisation spatiale, devis, décorations... Le premier des six livres, de quatre-vingt pages, est consacré à la construction des murs de soutènement. Son titre annonce qu'on saura évaluer la poussée de terres (Fig. 1). Bélidor découpe ce livre en cinq chapitres et en sous-parties, mais également en cinquante et un articles, auxquels nous nous référerons dans la suite.

3.2. Difficultés de lecture

La lecture en 2016 de la *Science des Ingénieurs* dans sa version originale présente deux ensembles de difficultés : de langage et de composition.

Le français du début du XVIII^e siècle est très proche du nôtre, mais le vocabulaire scientifique et technique renvoie fréquemment à des termes dont le sens a changé (*puissance* en 1729 pour *force* aujourd'hui, *revêtements* pour *soutènement*...) ou méconnus aujourd'hui car liés à des domaines tel que l'art militaire de ce temps (comme *parapet* pour *massif de terre situé sur le terre-plein en amont d'un rempart*). D'autres difficultés viennent des unités : le système en pieds, pouces et lignes de l'Ancien Régime a tôt fait de rendre fastidieuses les vérifications dès qu'il s'agit de calculs d'aires ou de racines. Les grandeurs elles-mêmes ne sont pas encore bien définies et sont rarement explicites, voire surdéterminées, l'analyse dimensionnelle des termes n'en est que plus délicate.

Les problèmes de composition sont, plus encore, rebutants. L'ouvrage est structuré en parties et sous-parties, mais une part des contenus est tantôt hors-sujet par rapport aux titres, tantôt grevée de digressions plus ou moins inattendues, à en perdre le fil de la pensée de l'auteur. Par ailleurs, la façon de rédiger les parties calculatoires est très désuète : tout n'est qu'applications numériques détaillées et emboîtées. Bélidor n'a pas pris le temps de récapituler ses travaux du Livre I, aucune réédition postérieure n'en a été l'occasion.

Il reste que lire un tel ouvrage est instructif car il donne à voir à l'état brut la pensée et les intuitions d'un scientifique confronté à un problème encore très nouveau.

3.3. Réserve de stabilité au renversement d'un mur (chapitres 1, 2, 3 et 5a)

La figure 2 synthétise l'application de la Statique que fait Bélidor aux murs seuls.

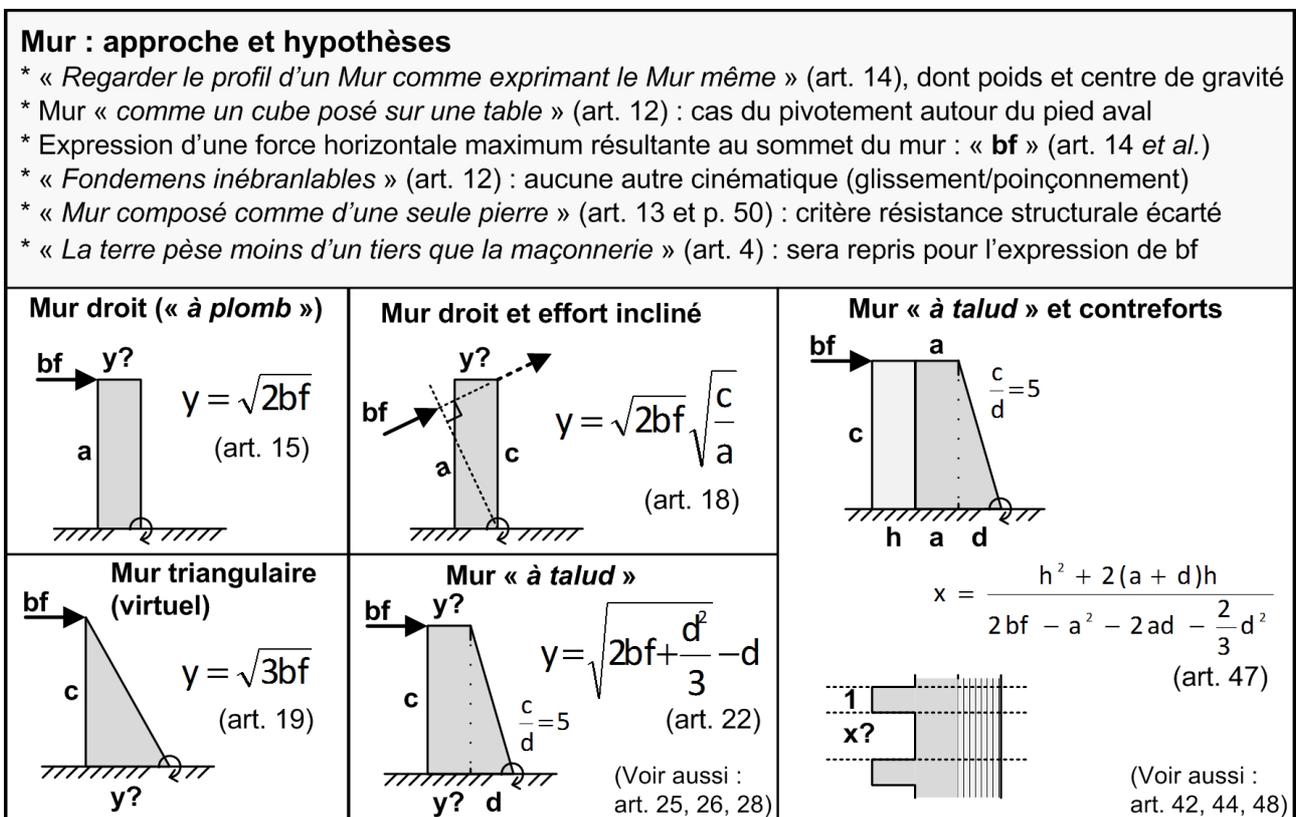


Figure 2. Stabilité d'un mur : hypothèses et principaux résultats de Bélidor

Dans les trois premiers chapitres, et le début du cinquième où il introduit tardivement la solution technique du contrefort, Bélidor étudie le problème de la stabilité d'un mur soumis à un effort horizontal à son sommet. Il introduit un terme qui reste obscur jusqu'au chapitre 4, « bf », censé représenter la poussée des terres, mais en même temps la capacité maximum du mur à rester stable. « bf » a pour unités des pieds carrés.

En fin de compte, après avoir procédé à des études paramétriques variées et au-delà du nécessaire, sans doute pour des raisons didactiques, Bélidor applique ses principes aux caractéristiques des murs du Profil général de Vauban, repris dans un tableau au début de l'article 51. Il calcule ainsi leur « bf » de mur : avec « talud » (fruit du parement aval) de 1H/5V, contreforts et autres données géométriques. Curieusement, le cas de l'effort « bf » incliné par rapport à l'horizontale est introduit mais jamais utilisé par la suite, comme si Bélidor n'avait pas su comment l'exploiter.

Enfin, au moyen d'une « Remarque », Bélidor écrit que « Mr Bullet & plusieurs autres » sont « tombés dans des erreurs fort grossières » (art. 21) de n'avoir pas tenu compte du principe du bras de levier. On constate en effet comment Gauthier (1717) se contente de chercher à équilibrer des poids de terre et de maçonnerie par un simple ratio. Sa difficulté est d'avoir omis de définir une cinématique de ruine dans son calcul d'équilibre limite.

3.3. Poussée des terres et première applications au dimensionnement (chapitre 4)

La figure 3 synthétise l'application de la Statique que fait Bélidor aux terres seules.

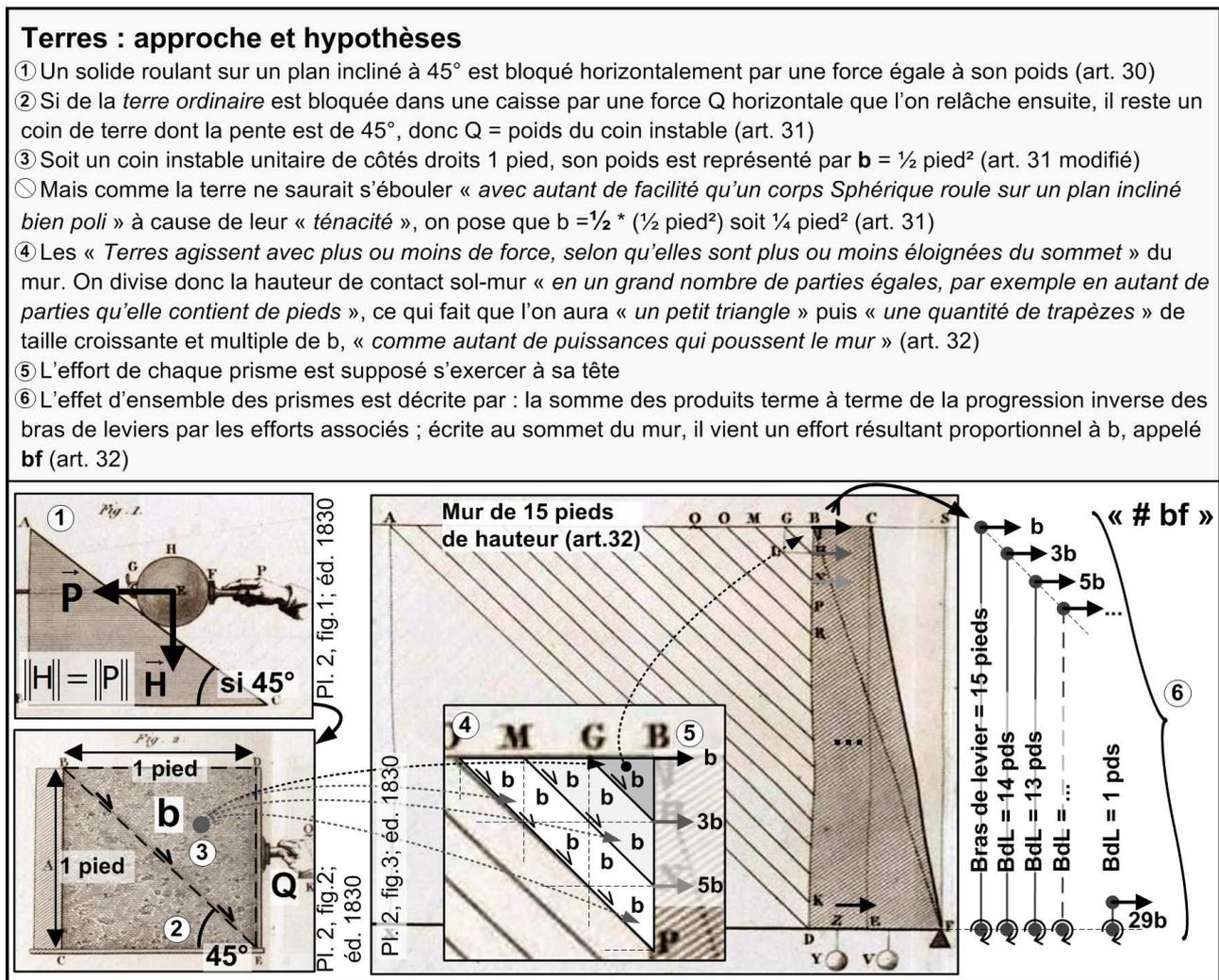


Figure 3. Poussée des terres d'après Bélidor (1729)

L'idée générale du modèle de Bélidor est de considérer le sol comme un ensemble de glisseurs qui, bien qu'inclinés à 45° , poussent horizontalement et individuellement sur le mur, générant un bras de levier chacun à sa hauteur. Le professeur en calcule ensuite les effets conjugués en tête de mur pour pouvoir les comparer à l'effort virtuel « bf » des premiers chapitres. Il montre comment calculer « bf », mais n'en produit jamais, dans l'ensemble de son ouvrage, que des expressions numériques en pieds et pouces carrés.

3.3.1. Sens physique de « bf » et sécurité du dimensionnement

Dans le terme « bf », b est un poids unitaire exprimé sous forme d'aire. f est adimensionnel et représente un opérateur de calcul de la résultante des forces en tête de mur (élément de réduction d'un torseur).

Bélidor suppose que l'effort que chaque glisseur, prisme solide, applique au mur se situe au sommet de la surface de contact (art. 32). Il avoue ne pas savoir exactement où se situe ce point d'application mais ne s'en inquiète pas. Il montre d'une part que l'erreur est d'autant plus faible que sa discrétisation du sol est fine, d'autre part qu'en surestimant (légèrement) le bras de levier résultant des terres son approche est sécuritaire, introduisant pour la première fois cette notion (art. 33).

Après avoir finalisé ses premiers calculs (art. 32) en introduisant le « bf terre » dans la formule donnant l'épaisseur au sommet d'un mur « à talud » de $1/5$, le professeur introduit à l'article 34 le coefficient de sécurité de 1,25 appliqué à « bf » sur lequel Verdeyen *et al* (1968) avaient attiré l'attention. Mais Bélidor explique que ce coefficient a pour but de « compenser » le profil de mur pour lequel il construit un nouveau tableau (art. 37), sans contrefort contrairement à celui de Vauban. Il précise tout de même que « on aurait tort de faire des revêtements qui fussent parfaitement en équilibre avec la poussée des Terres » (art. 34).

3.3.2. Paramètres des terres

Dans une démarche de sécurité, le rapport de poids volumiques maçonnerie / terres ordinaires de $3/2$ qu'il a appliqué dans la finalisation de ses calculs peut paraître un peu faible, notamment au regard des valeurs absolues des masses volumiques données dans un tableau du Livre III du même ouvrage. Mais c'est aussi le ratio qu'utilise Gauthier (1717), ce qui pourrait indiquer que Bélidor utilise un résultat qu'il n'a pas établi lui-même.

Ayant constaté que les murs qu'il dimensionne seraient colossaux s'il ne réduisait pas la pression exercée par ses glisseurs, il invoque la *ténacité* des terres (art. 31) et réduit alors la pression de moitié. Ce mot a été associé à un équivalent de « cohésion » dans la période avant Coulomb (Kérisel, 1956). Or, à l'article 32, Bélidor tente une explication pour son coefficient 0,5 uniformément appliqué à tous les glisseurs. Il avance que si la *ténacité* est une constante dans son modèle c'est qu'elle dépend de la pression, indiquant par là que nous devrions plutôt l'associer au frottement interne... ce qui rapproche son 0,5 d'une sorte de coefficient de pression des terres au repos K_0 pour des terres de $\phi' = 30^\circ$. Enfin, il est intéressant de constater que Bélidor n'a pas voulu, pour réduire la pression par une autre approche, redresser son talus de 45° à des pentes plus fortes.

3.4. Confrontation à Vauban (chapitre 5b)

Dans le long article 51, fin du cinquième chapitre et point d'orgue du Livre I de la *Science des Ingénieurs*, Bélidor calcule la sécurité des murs du Profil général de Vauban avec sa théorie en comparant les « bf » des murs de 10 à 80 pieds pour 10 à 80 pieds de hauteur de terre.

Il constate alors « la résistance des revêtements diminue à proportion qu'ils ont plus d'élévation », et ce « défaut du Profil général » vient de ce que l'épaisseur au sommet des murs est fixée à 5 pieds quelles que soient les hauteurs de murs. Pour Bélidor, c'est

illogique car la poussée des terres augmente ainsi plus vite que n'augmente la réaction maximum des murs : les murs devraient avoir un élancement constant.

Ce qui lui pose problème c'est que selon ses calculs - et on comprend que la remarque a dû lui être faite -, les murs de plus de 60 pieds ne devraient pas tenir debout. Il apporte plusieurs réponses dont : les murs « passent rarement 35 à 40 pieds » de hauteur, le retour d'expérience est donc à prendre avec prudence ; « les terres n'ont jamais toute la poussée dont elles sont capables » car elles sont mêlées « de lits de fascinage » (sorte de terre armée à base de branches) ; « le pied du revêtement est bien lié avec les fondemens, lesquels étant enterrés ne peuvent pas facilement incliner du côté du Fossé », ce qui montre que Bélidor a connaissance de la butée des terres.

Le professeur conclut en proposant deux pistes pour rationaliser les murs du Profil général par la modification de leurs épaisseurs au sommet : par le calcul selon sa théorie, ou selon une formule approchée forfaitaire. Cette dernière a pour pivot le mur de 30 pieds de haut, réduit les plus petits et épaissit les plus hauts.

La figure 4 montre les courbes d'élancement moyen des murs de Vauban (à contreforts) ainsi que ceux de Bélidor dans plusieurs cas de figure : les valeurs normales (Bélidor) et frappées du coefficient de sécurité 1,25 (Bélidor FS=1,25) issues de son tableau, et celles que nous avons calculé sans facteur appliqué à « bf », c'est-à-dire sans rapport de masses volumiques et sans réduction de pression de 50 % (Bélidor 'brut').

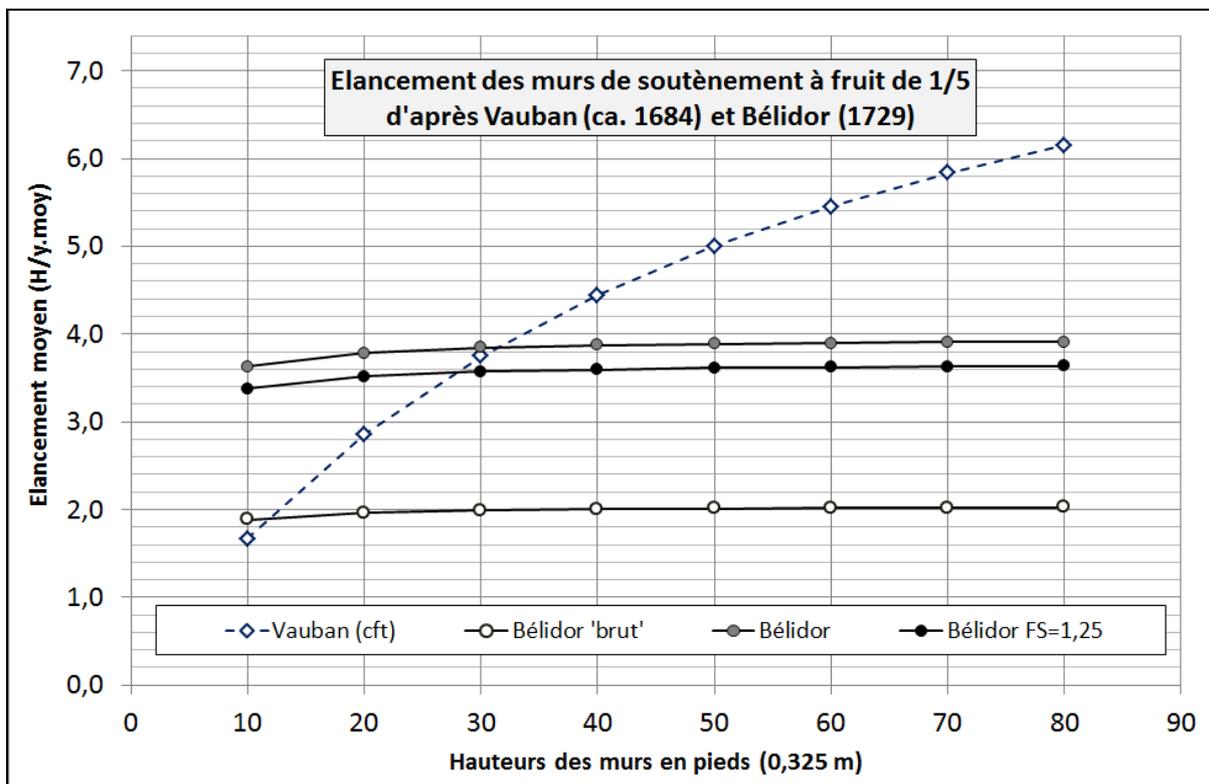


Figure 4. Comparaison des élancements moyens des murs de Vauban et Bélidor

On retrouve l'augmentation anormale de l'élancement moyen des murs de Vauban. Sur un autre plan, l'écart entre les courbes « Bélidor brut » et « Bélidor » montre le paradoxe auquel le professeur s'est trouvé confronté : avec le « K_0 », il a dû ajuster son modèle sur un jeu de données - très respecté et unique en son genre au début du XVIIIe siècle (Vauban, « meilleur garant », art. 37) - dont il voulait par ailleurs évaluer la sécurité. Cela fait apparaître le facteur 1,25 comme assez formel. Le génie de Bélidor est néanmoins de passer outre ce paradoxe, laissant de côté la sécurité absolue qu'il sait ne pouvoir évaluer, au profit de la sécurité relative, avec des arguments physiques cohérents.

4. Réexpression des résultats de Bélidor et interprétation

En prêtant une terminologie à des paramètres du modèle de Bélidor qui n'en avaient pas, nous proposons ci-dessous une expression de ses formules qui s'affranchissent du frein à la compréhension qu'est le terme « bf », ensuite appliquées à un mur à fruit en parement.

Nous posons donc : j, compteur de niveau (voir figure 3) lié à la discrétisation du massif de sol ; n, nombre total de niveaux ; L_0 , longueur unitaire de discrétisation (pour Bélidor : 1 pied) ; ρ_T/ρ_M , rapport de masses volumiques terres/maçonnerie ; K_0 , coefficient de réduction de poussée (valable pour le modèle de Bélidor et non les interactions réelles qui ont lieu) ; γ_{bf} , facteur partiel de sécurité augmentant « bf terre » ; $\tan(i)=c/d$ selon la convention de la case Mur « à talud » de la figure 2 ; y_{moy} , épaisseur moyenne du mur ; H, hauteur du mur ; M_j , moment exercé sur le mur par un glisseur j.

$$\vec{M}_j = (2j-1)b \times (n+1-j)L_0, \text{ d'où : } \sum_{j=1}^n \vec{M}_j = bfH = b \frac{(n+1)(2n+1)}{6} H \quad (1)\&(2)$$

$$\text{Or } b = \frac{1}{2} \left(\frac{H}{n} \right)^2 \text{ donc } bf = \frac{1}{3} \left(1 + \frac{3}{2n} + \frac{1}{2n^2} \right) \times \frac{1}{2} H^2 \quad (3)\&(4)$$

On voit ainsi que plus la discrétisation est fine (n élevé, donc, dans la logique de Bélidor, H élevé), plus le niveau de bras de levier équivalent à l'action d'ensemble des terres exerçant une poussée sur le mur de soutènement s'approche du tiers inférieur : c'est le modèle hydrostatique, auquel Bélidor s'est beaucoup consacré par ailleurs. On a enfin :

$$y_{moy.} = \sqrt{2bf + \frac{d^2}{3} - \frac{d}{2}} = H \sqrt{\frac{1}{3} \left(1 + \frac{3}{2n} + \frac{1}{2n^2} \right) \frac{\rho_T}{\rho_M} K_0 \gamma_{bf} + \frac{1}{3 \tan^2(i)} + \frac{1}{2 \tan(i)}} \quad (5)$$

Cette relation aide à voir que l'élanement moyen H/y_{moy} des murs de Bélidor tend vers la valeur $30/[\sqrt{(137)-3}] \approx 3,45$. Elle présente une légère différence avec celle vers laquelle tendent les élancements correspondants « Bélidor FS=1,25 » de la figure 4, que nous interprétons comme une conséquence des arrondis dans l'ancien système, ce que Navier (1830) a relevé dans ses propres calculs à propos d'autres aspects du Livre I.

5. Conclusions

En cherchant à calculer la sécurité au renversement des murs du Profil général de Vauban, Bélidor a introduit, en 1729, un modèle de sol rudimentaire mais privilégiant la recherche d'une pression réaliste pour trouver le bras de levier équivalent du sol. Le « coin de terre » sur une pente à 45° qu'il utilise au départ finit par passer au second plan au profit d'une logique de type « K_0 », qu'il trouve et fixe empiriquement à 0,5 grâce à un calage, intrigant, sur le même Profil général. S'intéressant aux seules poussées, il reste cohérent avec le fait que son modèle n'admet aucun déplacement, donc aucune rupture, ce qui l'a affranchi de connaître les caractéristiques du volume de terres que la perte d'équilibre entraînerait - comme pour l'eau derrière un barrage.

En 1773, attaché à un paradigme « solidien » pour les sols, Coulomb, pourtant militaire lui aussi, ne fait aucune mention de la version « hydrostatique » de son prédécesseur - en ignore-t-il l'existence et les possibilités ? L'analyse de Rankine (Caquot et Kérisel, 1956, p. 325) réintroduit en 1856 l'interprétation de Bélidor, sous une forme généralisée.

Bernard Forest de Bélidor est conscient que le « *fruit de [ses] veilles* » comme ses « *recherches les plus pénibles* » (*La Science des Ingénieurs*, Dédicace au roi Louis XV) ont abouti à une « *nouvelle théorie* » (Livre I, introduction). Elle est moderne dans son approche quantitative de la sécurité, opérationnelle dans ses résultats. Elle mériterait à son auteur d'être considéré comme à l'origine du dimensionnement géotechnique.

6. Remerciements

Nous souhaitons remercier Frédéric Rocher-Lacoste de nous avoir introduit et donné accès à l'édition originale de la *Science des Ingénieurs*.

7. Références bibliographiques

- Bélidor (B. F. de) A. (1729), La science des ingénieurs dans la conduite des travaux de fortification et d'architecture civile. C. Jombert, Paris, 533 p. | Editions critiques de Navier (Via BNF, Gallica) : F. Didot, 1813, Paris, 593 p., F. Didot, 1830, Paris, 596 p.
- Bélidor (B. F. de) A. (1737), Architecture hydraulique, ou l'art de conduire d'élever et de ménager les eaux pour les différents besoins de la vie. F. Didot, 1819, Paris, 668 p. (Via CNAM, Conservatoire Numérique)
- Bordes J.-L. (2000). Regard sur le passé de la géotechnique. Revue Française de Géotechnique, N° 91. pp. 13-26.
- Caquot A., Kérisel J. (1956). Traité de mécanique des sols. Gauthier-Villars, Paris. 559 p. CFMS (Non daté). www.geotech-fr.org/ressources-documentaires/histoire/portraits?portrait=Bernard+FOREST+de+BELIDOR
- Coulomb, C.A. (1773). Essai sur une application des règles de *maximis* et *minimis* à quelques problèmes de statique, relatifs à l'architecture. Mémoire présenté à l'Académie Royale des Sciences, publié dans : Coulomb, Théorie des machines simples (...). Bachelier, 1821, Paris, 385 p. (Via BNF, Gallica)
- Gambin M., Magnan J.-P. (2000). Pour l'enseignement de l'histoire et de la géotechnique. Congrès International sur la Formation en Géotechnique, Sinaïa. pp 15-22.
- Gauthier H. (1717). Sur l'épaisseur des culées des ponts (...), et sur les profils de maçonnerie qui doivent supporter des chaussées, des terrasses et des remparts, à quelque hauteur donnée que ce puisse être. A. Cailleau, Paris, 85 p. (Via CNAM, Conservatoire Numérique)
- Habib P. (1991). Histoire de la mécanique des sols. Les Cahiers de Rhéologie. Volume IX, N°1, pp. 1-14.
- Kérisel J. (1956). Historique de la mécanique des sols en France jusqu'au 20e siècle. Géotechnique, vol. 6, n° 3, pp. 151-166.
- Kérisel J. (1985). The history of geotechnical engineering up until 1700. The *Golden Jubilee Book, Part One*, pp. 3-95. *Proceedings of the Eleventh International Congress on Soil Mechanics and Foundation Engineering, San Francisco*. Balkema, Rotterdam.
- Kérisel J. (1993). History of retaining wall design. *Proceedings of the conference Retaining structures*, Robinson College, Cambridge. pp. 1-16. Th. Telford, London.
- Skempton A.W. (1985). A history of soil properties 1717-1927, *The Golden Jubilee Book*, pp. 95-123. (voir réf. Kérisel, 1985)
- Verdeyen J., Roisin V., Nuyens J. (1968). La mécanique des sols. Presses Universitaires de Bruxelles, 509 p.
- Virol, M. (2003). Vauban. De la gloire du roi au service de l'Etat. p. 290. Champ Vallon, Lonrai, 432 p.