

UN MODELE THEORIQUE DE COURBE DE RETENTION POUR LES SOLS NON SATURES A GRANULOMETRIE ETENDUE

A THEORETICAL MODEL OF RETENTION CURVE FOR UNSATURATED SOILS WITH LARGE PARTICLE SIZE DISTRIBUTION

Jacques MONNET⁽¹⁾, Dino MAHMUTOVIC^(2,3), Luc BOUTONNIER⁽³⁾, Saïd TAIBI⁽⁴⁾, Rinah ANDRIANTREHINA⁽⁴⁾

¹ *Gaiatech, 22 rue Antoine Chollier, 38170, Seyssinet, France*

² *L3S-R, Université Joseph Fourier, Grenoble, BP53, 38041, Grenoble, France*

³ *EGIS-Géotechnique, 3, rue Docteur Schweitzer, 38180, Seyssins, France*

⁴ *LOMC, CNRS UMR 6294, Université du Havre, BP 540, 75058 Le Havre, France*

RÉSUMÉ – Ce modèle de courbe de rétention utilise les relations physiques des sols non saturés. Avec cette approche, il n'y a pas besoin de supposer des formes particulières de la courbe de rétention, qui est une conséquence des hypothèses physiques. La présente étude utilise un modèle théorique basé sur l'arrangement de particule sphérique élastique. Elle est utilisée pour prédire à la courbe de rétention de deux échantillons différents.

ABSTRACT – This theoretical model of retention curve considers physical relations of non-saturated soils. With this approach, there is no need to assume particular shapes of the retention curves, which are a consequence of the physical assumptions. The present study is focused on a theoretical model based on elastic spherical particle arrangement. It is compared with the experimental retention curve of two different samples

1. Introduction

Le développement des outils numériques et la montée en puissance des micro-ordinateurs permettent de déterminer le comportement des grands ouvrages de terrassement comme les barrages, les digues, les excavations et remblais routiers ou ferroviaires. Tous ces ouvrages sont compactés dans un état proche de l'optimum Proctor avec un degré de saturation entre 90 à 98% et un sol non saturé. Pour obtenir une estimation précise de l'état final de densité du sol, il est nécessaire de modéliser le compactage du sol le long d'un trajet de mouillage. De plus, lorsque l'ouvrage de terrassement est achevée, il supporte des cycles de séchage et mouillage liés à l'action du soleil et de la pluie. Ces contraintes hydro-mécaniques nécessitent le développement d'un modèle théorique capable de simuler les chemins de séchage et d'humidification du sol dans la relation degré de saturation, indice des vides, succion.

Il existe plusieurs façons de modéliser les courbes de rétention. La première approche consiste à utiliser des corrélations expérimentales. Cette approche a eu beaucoup de succès avec les modèles (1) de Brooks et Corey (1964), (2) de Van Genuchten (1980) ou (3) de Gallipoly et al. (2003).

La seconde approche consiste à simuler les courbes de rétention par un modèle élasto-plastique incrémental (Arairo W., 2013). Cette méthode nécessite la connaissance de la courbe expérimentale de saturation et d'imbibition pour prédire le comportement d'une autre courbe de rétention. Elle utilise (α , n , m , S_{rsat} , S_{rres}) les paramètres de Van Genuchten (1980) et deux courbes limites de rétention.

La troisième approche est de considérer la modélisation physique des sols non saturés. Avec cette méthode, il n'y a pas besoin de choisir à priori des formes particulières des courbes de rétention, qui sont considérées alors comme une conséquence des hypothèses physiques. Une approche bidimensionnelle de la capillarité a d'abord été tentée avec des capillaires cylindriques (Li et Wardlaw, 1986; Mason et Morrow, 1991), puis des capillaires de section triangulaire (Tuller et al., 1999). La présente étude ne se focalise plus sur les chemins capillaires plus ou moins complexes, mais utilise un modèle théorique basé sur des particules sphériques en agencement élastique. Dans un premier temps un modèle uniforme est présenté avec un seul diamètre de particules du sol. Une deuxième étape étend l'utilisation du modèle aux sols à granulométrie étendue. Le modèle utilise seulement 5 paramètres physiques. Le résultat du modèle est comparé à la courbe de rétention expérimentale d'un échantillon de billes de verre graduée (4-140 μ m) et du limon de Livet-Gavet (2 μ m-30mm).

$$S_r = \left(\frac{s}{s_{air}} \right)^\delta \quad (1) \quad S_r = [1 + (\alpha \cdot s)^n]^m \quad (2)$$

$$S_r = \left(\frac{1}{[\phi \cdot (v-1) \psi \cdot s]^n} \right)^\delta \quad (3)$$

2. Expression de la courbe de rétention théorique pour le sol non-saturé

2.1. Hypothèses

De nombreux auteurs ont mentionné l'existence de quatre zones de saturation, chacune avec un comportement distinct. Cette hypothèse est reprise dans la conception de notre modèle, en grande partie basé sur le travail de la Boutonnier (2007):

- *Domaine D1* : $s \geq s_{air}$ et $S_r \leq S_{rair}$: La phase gazeuse est continue dans le sol. Cet état donne une succion s plus élevée que l'entrée d'air et un degré de saturation plus faible que le degré de saturation d'entrée d'air.
- *Domaine D2* : $s \leq s_{air}$ et $S_{rair} \leq S_r \leq S_{re}$ et $u_w \leq 0$: Dans ce domaine, l'air libre a disparu. L'air est occlus dans le sol. Il est en contact avec les particules du sol. La succion a pour effet d'augmenter les forces de contact intergranulaires. La pression de l'eau interstitielle est négative
- *Domaine D3* : $S_{re} < S_r < 1$ et $u_w > 0$: L'air est occlus dans l'échantillon de sol. Il est constitué de bulles d'air indépendantes du squelette. Les forces capillaires sont sans effet sur les forces de contact entre les particules du sol. Le domaine D3 correspond à des pressions interstitielles positives avec un degré de saturation inférieur à 1.
- *Domaine D4* : $S_r = 1$: Il n'y a pas d'air à l'état gazeux dans le sol. L'air est dissout dans l'eau. Le sol est saturé. La limite entre les domaines D3 et D4 correspond à une pression interstitielle positive et un degré de saturation égal à 1

2.2. Déformation des particules sphériques et volume du ménisque: Domaine D1

Pour compléter le modèle original de non-saturation (Monnet et Boutonnier, 2012) écrit pour le domaine D2 à D4, il a été décidé de modéliser le domaine D1.

Sous l'action de l'eau au niveau du contact entre particules, il y a aspiration sur la section transversale de la surface du bain (Fig. 1) et une tension de surface comme précédemment supposé (Taibi, 1994). Le modèle de sol est composé de particules sphériques uniformes de rayon R .

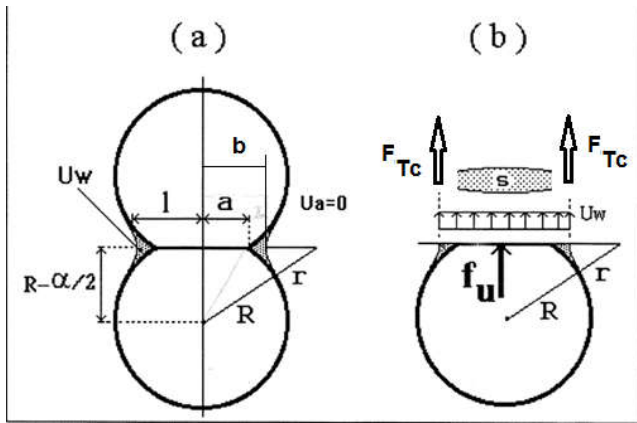
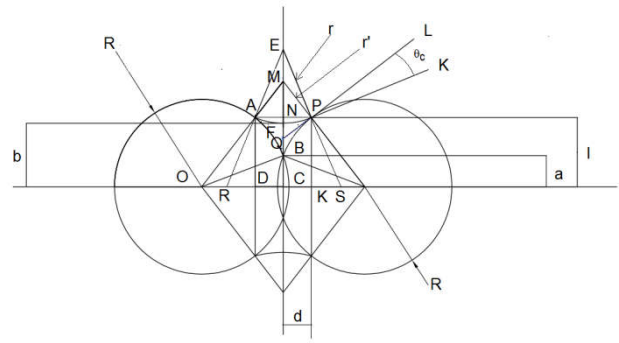


Figure 1. Modèle théorique de ménisque entre deux sphères (S.Taïbi, 1998)


 Figure 2. Modèle géométrique de ménisque deux sphères et un angle de mouillage θ_c

La loi de Laplace donne la succion en fonction de la tension superficielle T_c et des courbures principales du rayon r du ménisque et le rayon b du tore correspondant à la surface mouillée (4). Sous l'action d'une force normale F_N sur le plan de contact (5), les deux sphères se déforment élastiquement. La distance entre leurs centres diminue de la longueur élastique α et le contact n'est plus ponctuel. Il existe une zone plane et circulaire de rayon a (Fig. 1). Nous supposons que les sphères restent sphériques, sauf pour la partie plate du contact. La théorie des contacts élastiques de Hertz est supposée. La valeur de la force F_N perpendiculaire au plan de contact est donnée par l'équation (6) qui prend en compte la valeur de la succion s et la valeur de la tension de surface T_c .

$$s = T_c \cdot (1/r + 1/b) \quad (4) \quad \alpha = 2 \cdot R \cdot (1 - m) \quad (5)$$

$$F_N = s \cdot \pi \cdot b^2 + 2 \cdot \pi \cdot b \cdot T_c \quad (6)$$

2.3. Calcul analytique des volumes de ménisque avec un ménisque d'angle de mouillage: Domaine D1

Le contact entre les particules et l'eau se fait avec un angle de mouillage θ_c qui varie en cas de drainage ou humidification (Gras, 2011). Le calcul du volume du ménisque est réalisé avec une hypothèse de rotation autour de l'axe horizontal passant par le centre des deux particules (Fig. 2) et une symétrie horizontale par rapport au plan CE en contact des particules. Le volume du ménisque (7) est défini en fonction du volume du tronc de cône (8), le volume de l'air (9) et le volume des particules (10).

$$V_{men} = 2 \cdot (V_t - V_p - V_{air}) \quad (7)$$

$$V_t = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot (R_1^2 \cdot H_1 + R_2^2 \cdot H_2) \quad (8)$$

$$V_{air} = \pi \cdot r^2 \cdot CE \cdot \theta_5 - \frac{2}{3} \pi \cdot r^3 \cdot \sin \theta_5 \quad (9)$$

$$V_p = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \left\{ R^3 \cdot [(1 - \cos \theta_1)^2 \cdot (2 + \cos \theta_1)] - \left[\left(\frac{\alpha}{2} \right)^2 \cdot \left(3 \cdot R - \frac{\alpha}{2} \right) \right] \right\} \quad (10)$$

Le volume du ménisque a été simulé par un modèle Solidworks® qui permet de mesurer le volume du ménisque numérique, et de le comparer avec la valeur analytique du ménisque (7). La comparaison montre que les relations analytiques permettent de retrouver le volume du ménisque du modèle Solidworks®.

2.4. Les différents arrangements des particules du sol.

Les différents arrangements des particules du sol uniformes donnent une variation de l'indice des vides entre 1,315 à 0,343 (Taibi, 1994). Le programme SolidWorks® a été utilisé pour une modélisation précise des quatre arrangements possibles, tétraédrique, cubique, octaédrique, dodécaédrique (Fig. 3 à 4). Elle montre que l'indice des vides est indépendant du rayon des particules, et dépend seulement de l'agencement entre les grains de sol. Le rayon de particules a une influence sur la taille du REV (Representative Volume Element). La variable exprimant le phénomène pour un chemin de séchage ou d'humidification est le rapport entre les rayons de la bulle d'air et celui des particules.

Le modèle SolidWorks permet de déterminer: le nombre et l'angle de contact pour chaque particule; le nombre de ménisques total par arrangement; la surface des grains dans le VER; la dimension des bulles d'air en percolation et en nucléation.

Pour le chemin de séchage à la nucléation, le modèle considère: le rayon de la bulle qui apparaît à la nucléation; le nombre de bulles qui peut apparaître à l'intérieur du REV; le degré de saturation à la nucléation; le rayon de la bulle et la succion à la nucléation.

Pour le chemin de séchage à la percolation, le modèle considère: le rayon de la bulle qui est en mesure de filtrer; le rayon de la bulle et la succion à la percolation

Le calcul théorique de la relation entre la succion et le degré de saturation peut être effectué lorsque les ménisques sont indépendants (Fig..7). Lorsque les ménisques se rejoignent en coalescence, on suppose que la succion reste inchangée en humidification.

Sur le chemin de séchage la nucléation apparaît d'abord puis la percolation de l'air survient. Pour un sol bien gradué, on considère que la nucléation ne se produit pas.

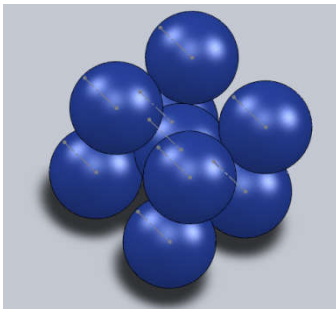


Figure 3. Arrangement Octaédrique; $e = 0,470$; 8 contacts; 8 ménisques

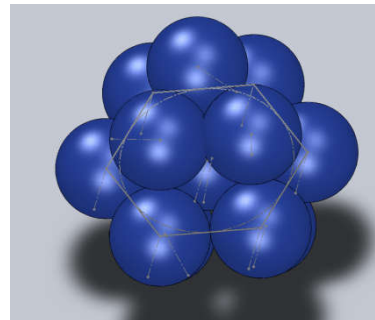


Figure 4. Arrangement dodécaédrique; $e = 0,343$; 12 contacts; 17,6 ménisques

2.5. Calcul de la courbe de rétention théorique pour un sol uniforme: Domaine D1

Pour un sol uniforme, avec un seul diamètre de particules de sol, différents arrangements sont possibles (tétraédrique, cubique, octaédrique, dodécaédrique). La position relative des particules est connue ainsi que le REV (eq.13 à 14), l'indice des vides, le nombre et l'orientation des contacts dans l'arrangement.

Inversement, la connaissance de l'indice des vides permet d'identifier le type d'arrangement de particules de sol. La connaissance de la teneur en eau ou la saturation permet de calculer le volume total de l'eau dans le REV (eq.11). La connaissance du nombre de contacts dans le REV et le nombre de ménisques complets permet de calculer le volume d'un seul ménisque (éq. 12). Le volume du ménisque dépend du rayon du ménisque, le rayon du grain et de la succion. Ceci permet le calcul de la succion (éq.4) associée à un indice des vide et une teneur en eau (Fig.5).

$$V_w = S_r \cdot e \cdot REV / (1 + e) \quad (11)$$

$$V_{men} = S_r \cdot e \cdot REV / [(1 + e) \cdot Nb_{menisci}] \quad (12)$$

$$REV_{Octa\ edral} = 64 \cdot R^3 / (3 \cdot \sqrt{3}) \quad (13)$$

$$REV_{Dodeca\ edral} = 40 \cdot R^3 \cdot \sqrt{2} / 3 \quad (14)$$

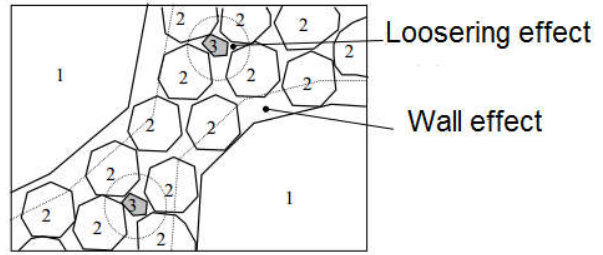
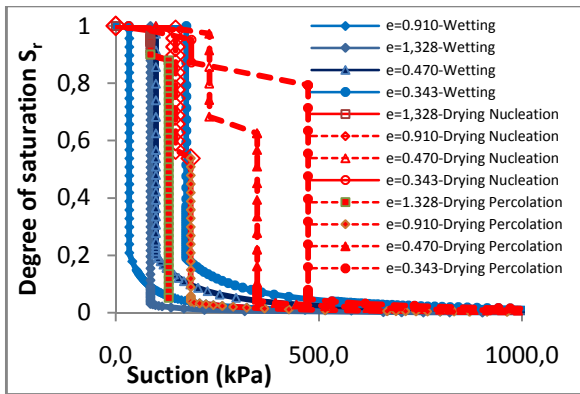


Figure 5: Courbes de rétention théoriques, sphères déformables de diamètre uniforme $4\mu\text{m}$,

Figure 6. Les perturbations exercées sur la classe moyenne par les gros grains et les petits grains (De Larrard, 1999)

2.6. Compacité et homogénéité d'un mélange granulaire de différents diamètres

Le modèle théorique est organisé du diamètre le plus grand au plus petit avec n diamètres différents D_i pour les particules du sol, tels que (15). Le symbole C est la compacité correspond au volume solide de l'échantillon de sol (16). La compacité relative de la classe i est noté C_i (17). En conséquence, la compacité C totale de l'échantillon de sol est donnée par (18). Dans la théorie, R_i correspond au refus en volume sur le tamis de diamètre D_i , par rapport au volume total des grains de échantillon (19). En supposant une densité unique pour tous les agrégats, ce terme est aussi le refus par tamis.

$$D_1 \geq D_i \dots \geq D_n \quad (15)$$

$$C = V_s / V_t = 1 - n \quad (16)$$

$$C_i = V_{si} / V_t = 1 - n_i \quad (17)$$

$$C = \sum_{i=1}^n C_i \quad (18)$$

$$R_i = C_i / \sum_{j=1}^n C_j = M_{di} / \sum_{j=1}^n M_{dj} \quad (19)$$

$$C_i = \beta_i / \left\{ 1 - \sum_{j=1}^{i-1} \left[1 - \beta_j + b_{ij} \cdot \beta_i \cdot \left(1 - 1/\beta_j \right) \right] \cdot R_j - \sum_{j=i+1}^n \left(1 - a_{ij} \cdot \beta_i / \beta_j \right) \cdot R_j \right\} \quad (20)$$

Pour un mélange de 3 parts avec un effet de décompactage (fig. 6) et un effet de paroi, si la classe 2 est dominante, ses grains sont soumis à un effet de décompactage exercée par les petits grains de classe 3 et par un effet de paroi lié aux gros grains de classe 1. Dans ce cas, la compacité est donnée par l'équation (20). La densité relative à la masse volumique des grains correspondant au coefficient β_i est donnée par (21).

$$\beta_i = \rho_{di} / \rho_s \quad (21)$$

$$V_{vi} = e_{Dom} \cdot R_i = \left(1/\beta_{Dom} - 1 \right) \cdot R_i \quad (22)$$

$$V_{si} = R_i \quad (23)$$

$$e_{exp} = \frac{\sum_{i=1}^n \left(1/\beta_{Dom} - 1 \right) \cdot R_i}{\sum_{i=1}^n R_i} \quad (24)$$

$$w_{NSi} = \frac{\rho_w}{\rho_s} \cdot \left[w \cdot \frac{\rho_s}{\rho_w} \cdot \sum_{j=i}^n e_{mi} \cdot S_{ri} \cdot R_i \right] = w - w_{fine} \quad (25)$$

$$S_{rNSi} = w_{NSi} \cdot \frac{\rho_w \cdot \sum_{j=i}^n e_{mi} \cdot S_{ri} \cdot R_i}{\rho_w \cdot \sum_{j=i}^n e_{mi} \cdot S_{ri} \cdot R_i} \quad (26)$$

2.7. Détermination de la compacité de chaque classe; cas du sol gradué

Dans un mélange de n diamètres différents, la théorie de De Larrard (1999) permet de trouver le diamètre dominant D_i , avec la compacité C_j et permet de calculer la porosité de la classe i de chaque classe de grains par l'équation (17) ainsi que son indice des vides e_i . Pour la première étape de calcul, la compacité totale du mélange C_m et la porosité n_m sont connues, mais différents de la compacité expérimentale. Considérons l'ensemble de ces n classes de grains. Pour une seule classe de grains, le volume des vides V_{vi} dans le mélange est donné par (22) en fonction de la densité relative du diamètre dominant β_{Dom} . Le volume des grains correspondant est donné par (23). Dans ces conditions, l'indice des vides e_{theo} du mélange est donné par la partie droite de l'équation (24). Cet indice des vides est différent de l'indice des vides expérimental, à gauche de l'équation (24). Le calcul itératif permet d'adapter la densité relative β_{Dom} de telle sorte que l'équation (24) soit satisfaite avec un β_i constant correspondant aux maximum de la porosité (Figure 10).

2.8. Détermination du diamètre de grain correspondant à l'entrée d'air

Nous supposons que les petits pores sont saturés ($S_{ri} = 1$), et que les grands pores sont non saturés de façon uniforme ($1 > S_{ri} > 0$). Dans ces conditions, la teneur en eau peut être décomposée en fonction de la taille des particules (40), avec des pores non saturés ($1 > S_r > 0$) pour $j < i$ (grand diamètre) et des pores saturés ($S_r = 1$) pour $j \geq i$ (les petits diamètres). Le rang des pores impliqué dans l'entrée d'air est i . Dans la relation (25), la seule inconnue est le rang i . On peut déterminer le rang i des grains impliqués dans l'entrée d'air ainsi que la teneur en eau des grains non saturés w_{NSi} . La connaissance de e_{mi} et de la teneur en eau w_{NSi} permet de trouver la succion d'un sol par indices des vides.

3. Résultats

3.1. Echantillon de billes de verres gradué 4 μ m-140 μ m

La simulation d'une expérience sur un échantillon de billes de verre (Indarto, 1991) a été fait sur un chemin de drainage et d'humidification. L'échantillon est gradué de 4 à 140 μ m, un poids unitaire de 18,7kN/m² ($e = 0,550$; dodécaèdre). Le poids volumique du verre est supposé égal à 29 kN/m³. La comparaison est faite pour la relation entre la succion et le degré de saturation (Fig.7). Les paramètres du modèle théorique sont indiqués (Tableau 1). Le nouveau modèle permet de trouver une estimation correcte de la courbe expérimentale à la fois sur le chemin de séchage (cor.0.852-0.695) ou sur le chemin d'humidification (cor.0.843). La différence entre la théorie et de l'expérience à 50% de saturation est seulement 4.2-0.8kPa sur le chemin de séchage et 2,7 kPa sur le chemin d'humidification

3.2. Limon de Livet-Gavet 1,6 μ m-30mm

La simulation de l'expérience sur un le limon de Livet-Gavet est faite le long du chemin de drainage et d'humidification. L'échantillon est constitué des grains compris entre 1.6 μ m-5mm, l'échantillon ayant été écrêté avant essai. Le poids volumique est de 15,2kN/m³ ($e = 0,716$). Le calcul permet de déterminer la porosité de chaque classe granulométrique (Fig.10). La comparaison est faite pour le relation entre la succion et le degré de saturation (Fig.8). Les paramètres du modèle théorique sont indiqués (tableau 1). Le nouveau modèle est proche mais inférieur à l'expérience sur le chemin de mouillage. La différence entre la nouvelle théorie et l'expérience à 50% de saturation est de l'ordre de 50kPa sur le chemin de mouillage et de 1300kPa au séchage.

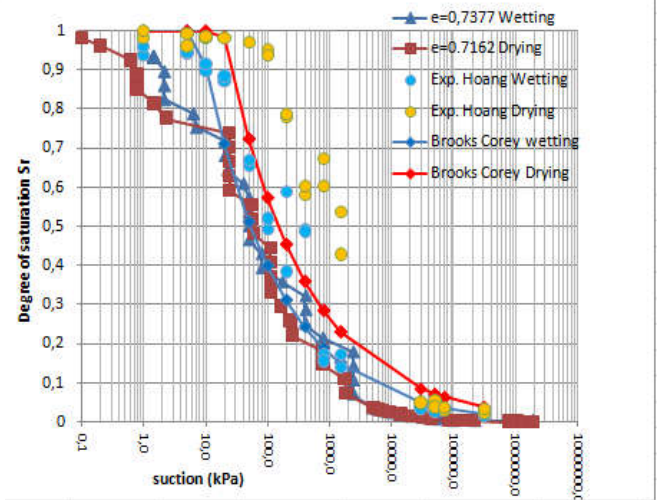
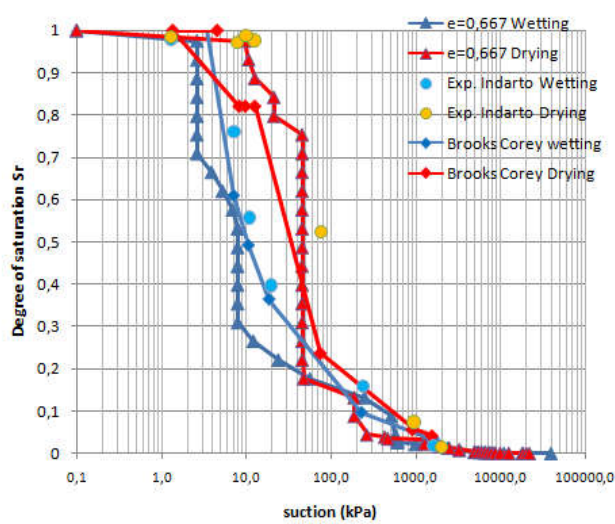


Figure 7: Comparaison expérience théorie; billes de verre (Indarto, 1991) - $e=0.667$, $e_{Dom}=0.763$, $\theta_c=20^\circ$ séch. $\theta_c=25^\circ$ mouil.

Figure 8: Comparaison expérience théorie Livet-Gave; $e=0.738$ au mouil.; $e_{dom} = 0,869$; $\theta_c=5^\circ$ mouillage

Tableau 1 : Les 5 paramètres physiques du calcul (w) en humidification chemin ou (d) au séchage pour un échantillon de billes de verre et un limon

Echant.	Théorie					Brooks et Corey	
	γ_s kN/m ³	v_p	θ_c Deg.	R_p μm	T_c 10 ⁻⁵ kN/m ³	S_{air} kPa	δ
Billes verre	29	0.25	20d 25w	4 to 140	7.28	2.7d 3.1w	2.00d 0.57w
Limon	26	0.2	0d 5w	1,6μm à 3cm	7.28	18.8d 7.7w	0.343d 0.358w

4. Conclusion

Une nouvelle théorie est présentée pour le calcul de la courbe de rétention du sol au séchage ou à l'humidification. Il explique la différence entre ces deux trajets par la saturation des particules de sol avec des ménisques d'eau, qui sont indépendants à faible saturation, puis deviennent coalescent à saturation élevée au mouillage et par l'apparition d'une percolation de l'air au séchage.

Ce nouveau modèle utilise seulement 5 paramètres physiques (minéralogie, indice des vides, rayon de particules et la granulométrie, angle de mouillage, la tension superficielle de l'eau) et n'a pas besoin de paramètres expérimentaux supplémentaires toujours difficile à déterminer. Il permet de trouver la courbe de rétention à l'humidification et au séchage pour l'échantillon de bille de verre. Il a été utilisé pour déterminer la courbe de rétention du limon Livet-Gavet, mais correspond à des succions plus faibles qu'expérimentalement. La prise en compte de l'eau adsorbée dans le modèle sera la prochaine étape de la modélisation.

Les auteurs remercient l'ANR pour son soutien au projet TerreDurable par le contrat VILD 00401 du programme ANR Bâtiments et Villes Durables

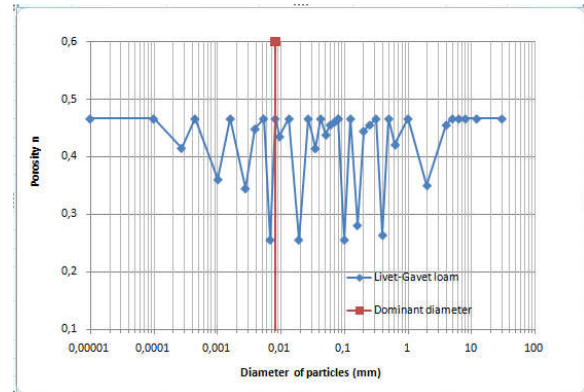
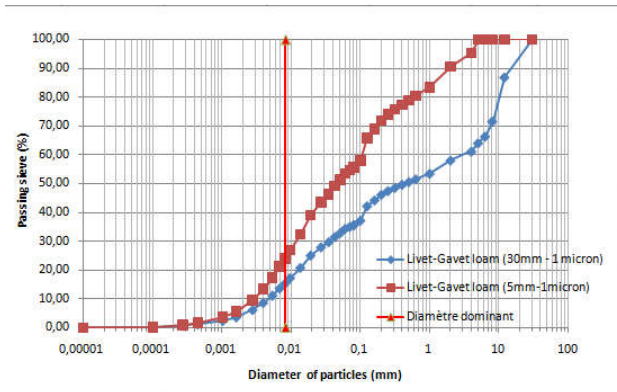


Figure 9. La courbe granulométrique du limon de Livet-Gavet

Figure 10: Porosité du limon de Livet-Gavet - $e = 0,716$, $e_{Dom} = 0,910$

5. Références bibliographiques

- Brooks R.T., Corey A.T. (1964) Hydraulic properties of porous media. Hydrology paper n°3, *Civil Eng; Depart. Colorado State Univ.* Fort Collins, Colorado
- Boutonnier, L., Virellet, M. (2003), Tassements et gonflements instantanés dans les sols fins proches de la saturation, *Revue Française de Géotechnique* 104, p.3-19.
- Boutonnier, L. . (2007) Comportement hydromécanique des sols fins proches de la saturation : cas des ouvrages en terre : coefficient B, déformations instantanées et différées, retrait /gonflement, *Thèse de doctorat INP, Grenoble, France* ;
- Boutonnier L. (2010). Mechanics of unsaturated geomaterials, Chap.14 : Coefficient B, Consolidation and swelling in Fine Soils near saturation, *Ed.L.Laloui, J.Wiley.*
- Boutonnier L., Monnet J., Fleureau J.M., Fry J.J., Loret B., Magnan J.P., Plé O., Wong K. (2011) *TerreDurable – Terrassements économiques, écologiques et durables, Agence Nationale de la Recherche – Programme Bâtiments et Villes durables, France.*
- Indarto (1991) Comportement mécanique et compactage des matériaux de barrages, Thèse Doctorat, Ecole Centrale Paris
- Li Y., Wardlaw N.C.(1986) Mechanisms of nonwetting phase trapping during imbibition at slow rates, *J. Colloid Interface Sci.*, ,109, 476-486.
- Mason G., Morrow NR, 1991,Capillarity behavior of a perfectly wetting liquid in irregular triangular tubes, *J. Colloid Interface Sci.*, ,141(1), 262-274
- Monnet J. , Boutonnier L. (2012) Calibration of an unsaturated Air-Water-Soil model, *Archives of Civil and Mechanical Engineering*, 12, 493-499.
- Tuller M., OR D., Dudley L.M.(1999) Adsorption capillary condensation in porous media liquid retention and interfacial configurations, *Wat. Resour. Res*, 35(7), 1949-1964.
- Van Genuchten (1980), -A closed form equation for predicting the hydraulic conductivity of unsaturated soils, *Soil Scienc.Soc. Am. J.*, Vol.44, p.892-898