

APPORT DES MODELES D'ENDOMMAGEMENT SUR LA GEOMETRIE DE LA ZONE DE RUPTURE AUTOUR DES OUVRAGES PROFONDS DANS DES ROCHES QUASI-FRAGILES

Ahmad POUYA¹, Edoardo TRIVELLATO^{1,2}, Darius SEYEDI², Minh Ngoc VU²

¹: Laboratoire Navier (IFSTTAR, CNRS, ENPC), Ecole des Ponts ParisTech, Marne-la-Vallée, France

²: Andra, Direction de la R&D, 1/7, rue Jean Monnet, 92298 Châtenay-Malabry cedex, France

Email : ahmad.pouya@enpc.fr

RÉSUMÉ – Les zones endommagées rencontrées autour des ouvrages profonds dans les roches quasi-fragiles montrent parfois des formes et étendues qui ne peuvent pas être expliquées par des approches classiques en élastoplasticité. Nous montrons ici qu'un phénomène d'instabilité et de bifurcation du matériau élastique-fragile peut être à l'origine de ces particularités géométriques. Nous comparons les résultats obtenus pour la géométrie de la zone endommagée à l'aide de deux modèles radoucissants, dont un élastoplastique et l'autre endommageable. Nous montrons que le modèle à endommagement radoucissant, dont les paramètres sont ajustés à partir des données expérimentales sur une roche quasi-fragile, permet d'approcher dans une certaine mesure la forme et l'étendue de la zone endommagée autour des galeries profondes dans ces roches.

Mots-clés: endommagement, plasticité, zone endommagée, radoucissement, matériaux quasi-fragiles, instabilité, modélisation numérique

1. Introduction

L'excavation des galeries ou puits dans les roches quasi-fragiles profondes crée une zone endommagée, fracturée ou plastifiée autour de ces ouvrages dont la forme et l'extension sont importantes à connaître pour discuter de l'intégrité et prédire l'évolution future de ces ouvrages. L'étendu de cette zone est parfois estimée à partir d'un champ de contraintes calculé en élasticité. Mais cette méthode ne tient pas compte de la redistribution des contraintes due aux phénomènes irréversibles. D'autres estimations de cette zone perturbée mécaniquement reposent sur un calcul élastoplastique. Mais les méthodes classiques de modélisation en élastoplasticité se montrent insuffisantes pour expliquer la géométrie de la zone perturbée mécaniquement rencontrée dans certains cas d'ouvrages profonds en roches quasi-fragiles, en particulier certaines galeries du

Laboratoire Souterrain de l'Andra à Bure. Tout laisse penser que des phénomènes d'endommagement fragile et de rupture, qui sont à l'évidence à l'œuvre dans la création de cette zone, soient aussi déterminant pour sa forme et doivent être pleinement pris en compte pour l'expliquer. La modélisation de l'endommagement pour un matériau radoucissant pose beaucoup de difficultés numériques et en particulier, de problèmes d'instabilités numériques liées à la localisation des déformations. De ce fait, souvent le formalisme d'élastoplasticité radoucissant a été utilisé pour déterminer la zone endommagée dans une roche quasi fragile. Mais rien ne prouve que l'effet de l'endommagement dans le champ proche des ouvrages souterrains puisse être reproduit par la plasticité même radoucissante. Même si les paramètres des deux modèles peuvent être ajustés de manière à reproduire la même courbe de contrainte déformation sous chargement en compression monotone, ces deux modèles peuvent conduire à des résultats différents concernant la zone de perturbation mécanique. En effet, dans le champ proche des ouvrages souterrains, la roche subit un trajet de contraintes différent d'une compression monotone. Par ailleurs les déformations irréversibles pour le matériau plastique ou les changements de modules pour le matériau endommageable peuvent avoir des effets différents sur la redistribution des contraintes autour de l'ouvrage. De ce fait, la réponse en champ proche autour des ouvrages peut être différente en élastoplasticité et en endommagement. Pour analyser ces problèmes, dans la suite, d'abord une analyse qualitative est présentée pour montrer en quoi le phénomène d'instabilité et de bifurcation dû à l'endommagement peut être déterminant pour la forme et l'étendue de la zone endommagée dans une roche quasi-fragile. Nous montrons en particulier que cette instabilité peut expliquer une grande dissymétrie de cette zone qui paraît parfois de manière paradoxale autour des ouvrages de section circulaire dans des champs de contraintes initiales relativement isotropes.

Après cette analyse qualitative, les géométries des zones perturbées obtenues avec deux modèles de matériaux radoucissants différents sont comparées. Les paramètres de ces modèles sont choisis de façon à obtenir exactement la même courbe de contrainte-déformation pour un chargement sous compression monotone. Les différences entre les résultats des deux modélisations, en ce qui concerne la forme et l'étendue de la zone de perturbation mécanique autour d'un ouvrage profond, sont alors analysées et discutées.

2. Instabilités et dissymétries due à l'endommagement fragile

Pour une galerie de section circulaire dans un massif isotrope à contraintes initiales isotropes ou d'isotropie transversale autour de l'axe de la galerie, la zone endommagée doit en principe être isotrope. Dans certains cas d'ouvrages profonds dans des roches quasi-fragiles on observe un phénomène inhabituel d'une zone endommagée /fracturée très étendue dans une direction tandis que les contraintes dans le plan de la section sont relativement isotropes. Nous montrons ci-dessous que cette dissymétrie de cette zone, comparée à la symétrie axiale de la géométrie initiale et du chargement autour de l'axe de la galerie, peut être expliquée par un phénomène d'instabilité d'évolution.

Dans l'étude des ouvrages du génie civil, il est courant d'évoquer les risques d'« instabilités mécaniques » quand les charges appliquées sur le système atteignent ou dépassent les capacités ultimes de l'ouvrage. Ce n'est pas ce type d'instabilités que nous envisageons ici. L'*instabilité* considérée ici est celle qui caractérise l'évolution d'un système arrivant à un point où plusieurs solutions d'évolutions deviennent possibles sous l'effet du même chargement extérieur. Certaines branches d'évolution deviennent alors instables et le système suit une branche d'évolution qui est plus stable. La stabilité d'une branche est comprise dans le sens suivant : si de petites perturbations écartent légèrement le système sur cette branche, les modifications de forces induites dans le système tendent à ramener le système vers son évolution initiale. Il s'agit ici de la même

notion d'instabilité qui explique le phénomène bien connu de flambage des poutres et des coques. Or, une des particularités de ce type d'instabilité est de briser les symétries du système initial de ses symétries de géométrie, de chargement et de propriétés de matériaux. La forme flambée d'une poutre de section circulaire sous une compression axiale ne respecte plus la symétrie axiale du problème de départ. Cela se produit aussi pour les structures cylindriques comme les tubes et les coques sous une pression extérieure plus grande que la pression intérieure : au-delà d'une différence de pression critique la structure flambe dans un mode de forme ondulatoire sur le contour qui brise la symétrie circulaire du problème initial (Silvestre 2007). Ces phénomènes qui se produisent ici pour des structures élastiques, peuvent se produire aussi pour des structures en matériaux dissipatifs. Une telle instabilité d'évolution pourrait expliquer que la forme endommagée ne respecte pas la symétrie circulaire du problème de départ. Mais encore faut-il montrer que dans le processus de création d'une zone endommagée autour d'un ouvrage circulaire dans un massif isotrope, une instabilité potentielle d'évolution circulaire peut bien exister.

Considérons donc un ouvrage circulaire dans un massif infini isotrope dans lequel règne un champ de contraintes lointaines isotropes σ_∞ . Supposons pour simplifier le problème que le critère de résistance du matériau soit du type Mohr-Coulomb, c'est-à-dire, indépendant de la contrainte intermédiaire. La rupture intervient alors quand la le déviateur à la paroi atteint la valeur critique de résistance de la roche. Cette limite est atteinte simultanément sur tout le périmètre du cercle correspondant à la paroi de l'ouvrage. Une solution d'évolution possible est alors une zone endommagée circulaire autour de l'ouvrage. Cette zone pourrait s'agrandir avec le chargement (le déconfinement dû à l'excavation) tout en restant circulaire. Mais nous allons montrer que ce type d'évolution est instable. En effet, supposons qu'il y a des petites imperfections qui font qu'en un point du contour cette limite soit atteinte un peu plus tôt que les autres et donc qu'une zone de rupture se développe autour de ce point (point A, Figure 1).

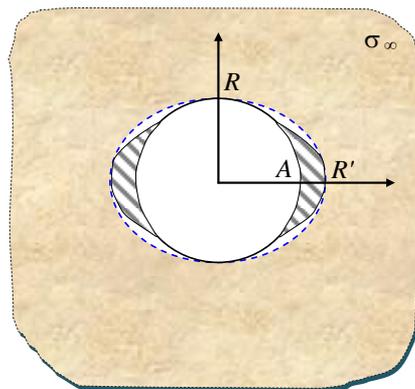


Figure 1. Zone endommagée autour de l'ouvrage et son approximation par une forme elliptique

Faisons alors les deux hypothèses simplificatrices suivantes pour montrer la nature d'une instabilité possible. D'abord, supposons que le matériau est fragile : il ne présente plus aucune résistance après la rupture. On peut donc supprimer la zone de rupture du modèle en la remplaçant par du vide. Ensuite, supposons que cette zone cassée et supprimée confère à la section une nouvelle forme qui se rapproche globalement d'une ellipse. Le cercle de rayon R initial est ainsi remplacé par une ellipse de demi-diamètre $R' > R$ dans la direction où il y a eu rupture. Mais on remarque alors que la contrainte orthoradiale à la paroi de la nouvelle section augmente, et donc aussi le déviateur, dans la zone de rupture. En effet, pour une section elliptique, en supposant un déconfinement

totale, la contrainte orthoradiale est donnée par la formule suivante (Martin Sadd 2005) qui montre qu'elle augmente avec le rapport des rayons:

$$\sigma_{\theta\theta} = 2 \frac{R'}{R} \sigma_{\infty} \quad (1)$$

On peut montrer la même tendance avec une formule plus précise prenant en compte le taux de déconfinement. On trouve ainsi que le phénomène ne peut que s'amplifier. Ainsi une petite imperfection initiale évolue forcément vers une forme de la zone endommagée très allongée dans une direction par rapport à d'autres. Ceci explique la forte dissymétrie de cette zone qui peut être rencontrée autour d'un ouvrage de symétrie de révolution dans une roche quasi-fragile. Ce qui limite l'évolution de la zone perturbée mécaniquement vers des formes extrêmement allongées (un rayon R' tendant vers l'infinie) est d'abord le fait que la roche dans la zone endommagée ne perd pas complètement sa résistance et garde une résistance résiduelle. Ensuite, l'endommagement n'est pas le seul phénomène présent dans le processus et d'autres phénomènes comme la plasticité qui sont aussi souvent présents, n'ont pas le même effet sur la redistribution des contraintes et peuvent stabiliser le processus. Nous allons étudier et comparer ces phénomènes dans les sections suivantes.

3. Modèles des matériaux

Nous allons présenter deux modèles existants dans le code Porofis qui correspondent exactement à une même courbe de contrainte-déformation avec radoucissement mais dont l'un est élastoplastique et l'autre élasto-endommageable.

3.1 Modèle élastoplastique

Le modèle élastoplastique linéaire isotrope à écrouissage linéaire radoucissant (modèle 31140 de Porofis) est défini sur la base d'un critère de Drucker-Prager avec écrouissage et avec les équations suivantes :

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} : (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p) \quad (2)$$

$$f(\boldsymbol{\sigma}, \xi) = \sigma_e + \sin \alpha I_1 - K(1 - \xi) \quad (3)$$

\mathbf{C} est le tenseur d'élasticité isotrope de paramètres E et ν et :

$$I_1 = tr(\boldsymbol{\sigma}), \quad \sigma_e = \sqrt{3J_2} = \sqrt{\frac{3}{2} s : s}, \quad s = \boldsymbol{\sigma} - \frac{1}{3} tr(\boldsymbol{\sigma}) \boldsymbol{\delta} \quad (4)$$

Le paramètre α exprime l'effet de la contrainte moyenne et K est relié à la résistance en compression simple, noté σ_0 par $\sigma_0 = \frac{K}{1 - \sin \alpha}$. La vitesse de déformation plastique est donnée par le potentiel plastique associé. Le paramètre d'écrouissage ξ varie entre 0 et une valeur maximale qui fait chuter la limite de plasticité à une valeur résiduelle σ_r . La loi d'évolution de ξ en fonction de la déformation plastique est choisie de manière à trouver une allure linéaire par morceaux pour la courbe de contrainte déformation axiale d'une éprouvette sous compression. Cette allure est représentée dans la figure (2) où la branche de décharge est représentée par la ligne P (module d'élasticité inchangé). La branche D correspond au modèle d'endommagement qu'on verra plus loin. Sur cette figure, $\varepsilon_0 = \sigma_0/E$ représente la limite d'élasticité en déformation et ε_r est la déformation à laquelle on atteint la résistance résiduelle. On définit les deux paramètres:

$$\eta_r = \frac{\sigma_r}{\sigma_0}, \quad \beta = \frac{\varepsilon_r - \varepsilon_0}{\varepsilon_0} \quad (5)$$

qui indiquent respectivement le taux de chute de résistance et la ductilité du matériau. La limite $\beta = 0$ correspond au matériau élastique fragile.

3.2 Modèle d'endommagement

Le modèle d'endommagement utilisé est à élasticité linéaire isotrope avec une variable d'endommagement scalaire, et un critère d'endommagement du type Drucker-Prager (modèle 31500 du Porofis) :

$$\boldsymbol{\sigma} = (1 - D) \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon} \quad (6.a)$$

$$f(\boldsymbol{\sigma}, D) = \sigma_e + \sin \alpha I_1 - g(D)K \quad (6.b)$$

L'évolution de D avec le chargement est déduite de l'équation de la consistance :

$$\dot{f} = \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \frac{\partial f}{\partial D} \dot{D} = 0 \quad (7)$$

L'expression de la fonction g est choisie de manière à trouver comme courbe de contrainte déformation axiale d'un essai de compression simple la courbe linéaire par morceau donnée dans la Figure 2, avec la branche D pour le trajet de décharge (pas de déformation permanente).

On note que les deux matériaux ci-dessus dépendent des mêmes 6 paramètres que sont E , ν , $\sin \alpha$, K , η_r et β . Si on prend les mêmes valeurs pour ces 6 paramètres, les deux modèles fournissent exactement la même courbe de contrainte déformation pour un essai de compression monotone. Mais comme on va voir dans la suite les résultats obtenus par ces deux modèles pour la zone endommagée ou plastifiée autour de l'ouvrage seront très différents.

4. Résultats des simulations

4.1 Contraintes in-situ isotropes

Nous avons d'abord comparé les zones endommagées ou plastifiées obtenu pour un ouvrage dans une roche quasi-fragile. Les paramètres de modèles et l'état des contraintes adoptés ici ne correspondent pas au cas précis d'un ouvrage réel, mais d'un ouvrage typique en grande profondeur et ont été choisis de manière à bien illustrer les phénomènes que nous voulons mettre en évidence.

Une contrainte initiale isotrope $\sigma_v = 12$ MPa a été prise en compte, avec des paramètres $E=2$ GPa, $\nu=0,13$, les autres paramètres sont donnés dans le Tableau 1. On suppose une faible valeur de la contrainte hors plan, correspondant à l'effet Poisson de la contrainte σ_v sous l'hypothèse de des déformations planes. Cette contrainte est plus faible que la contrainte hors plan in situ. Mais notons que la valeur de la contrainte hors plan au voisinage du front de taille peut être beaucoup plus faible que la contrainte initiale du fait du relâchement des contraintes. Comme cette contrainte affecte beaucoup les résultats et peut masquer certains phénomènes que nous voulons ici illustrer, nous préférons maintenir ici une valeur faible. La zone perturbée mécaniquement créée par l'excavation a été modélisée dans les Figure 3 avec $\sigma_h = \sigma_v = 12$ MPa.

La Figure 4 montre les isovaleurs de la variable d'endommagement D et la figure d les isovaleurs de la variable d'écrouissage ξ . Ces figures indiquent ainsi la zone endommagée ou plastifiée dans chaque cas. On note donc une différence nette entre le

modèle plastique pour lequel la zone plastifiée garde une forme presque circulaire et le modèle avec endommagement qui présente des instabilités géométriques pour la zone endommagée lui donnant une forme en pétales ou avec des lobes. De manière très analogue aux modes de flambages des coques cylindriques, le nombre de ces lobes dépend des paramètres du modèle.

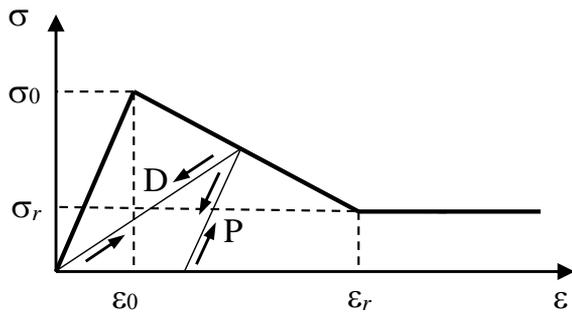


Figure 2 : Courbe contrainte-déformation d'un essai de compression simple pour deux modèles radoucissant élastoplastique (trajet de décharge P) et endommageable (trajet de décharge D).

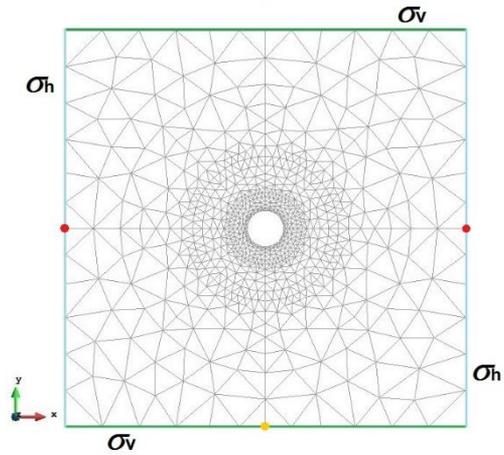
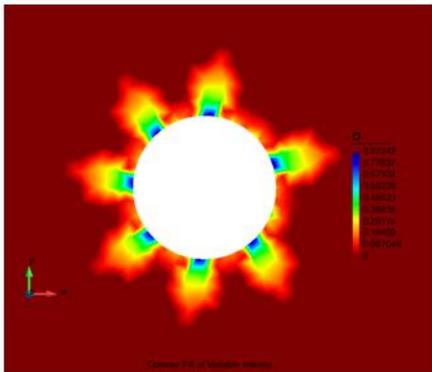
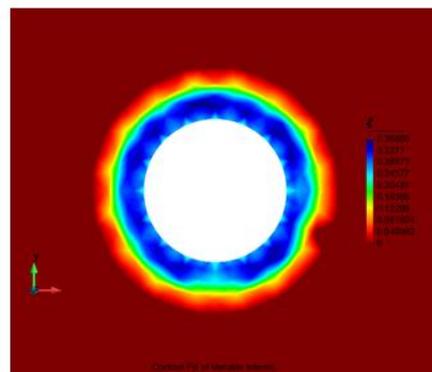


Figure 3 : Maillage et conditions aux limites ($U_x=0$ au point orange et $U_y=0$ aux points rouges).



(a)



(b)

Figure 4 : (a) zone endommagée, (b) plastifiée avec $K=8.0$ MPa.

Avec des valeurs de K plus faibles on obtient un nombre de lobes plus faibles mais une localisation plus accentuée. L'orientation de ces lobes est bien sûr aléatoire et déterminée par les imperfections du maillage. Mais si une petite anisotropie des contraintes initiales existe, elle pourra être déterminante et fixer cette orientation. Pour certaines valeurs de paramètres on trouve seulement deux lobes, mais elles sont alors trop localisées par rapport à ce qu'on observe autour des galeries (voir figures plus loin). On peut s'attendre à ce que combiner des modèles à endommagement et plasticité radoucissant permette de trouver des formes proches d'une ellipse allongée pour la zone perturbée mécaniquement autour des ouvrages profonds dans les argilites.

4.2 Contraintes in-situ anisotropes

Dans cette section nous avons introduit une faible anisotropie dans les contraintes in situ dans le plan de la section de la galerie. Nous avons supposé une contrainte verticale $\sigma_v=13$ MPa pour une contrainte horizontale $\sigma_h=11$ MPa (Fig. 3). La valeur de la contrainte hors plan est fixée à 7 MPa. Ces contraintes sont d'abord appliquées sur un modèle avec

la partie cavité remplie du même matériau que le massif afin de reproduire l'état des contraintes avant l'excavation. Les éléments correspondant à la partie galerie ont alors été enlevés du modèle et les contraintes à l'interface (paroi de la galerie) relâchées par une fonction spéciale de Porofis qui modélise ainsi l'excavation.

Les deux modèles élastoplastique et avec endommagement ont été utilisés lors de cette modélisation comme dans le cas précédent. Les valeurs des paramètres sont les mêmes que celles données dans le Tableau 1.

E (MPa)	ν	$\sin \alpha$	K (MPa)	β	η_r
$6 \cdot 10^3$	0.25	0.2	8.0	0.7	0.7

Tableau 1 : Valeurs des paramètres utilisés pour les simulations préliminaires sous contraintes anisotropes.

La Figure 5-a présente la zone endommagée pour le premier modèle, tandis que la Figure 5-b présente la zone plastifiée pour le second. Ces figures représentent les isovaleurs respectivement de D et de ξ . Nous notons que dans les deux cas la zone perturbée est plus allongée dans la direction horizontale. Nous avons reproduit également les isovaleurs du critère f dans chaque cas (Figure 5-c et 5-d). On note que f reste nulle sur toute une zone connexe à la paroi. Ce résultat est intéressant car il tend à montrer que, du moins dans le cas d'un chargement en excavation monotone, une fois la limite du critère est atteinte en un point à une certaine distance de la galerie, ce point reste sur l'état limite du critère pour les instants suivants (et ne rentre pas par décharge dans le domaine élastique). Ceci reste vrai ici pour des critères radoucissants aussi bien en plasticité qu'en endommagement, ce qui n'est a priori évident.

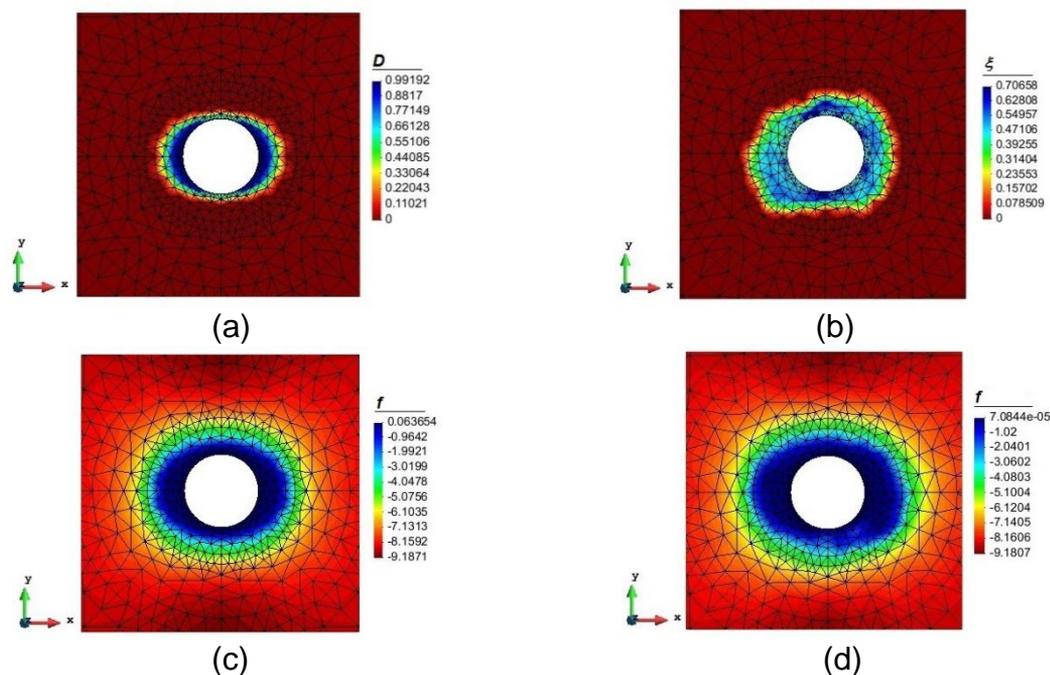


Figure 5 : Zone perturbée mécaniquement (a) endommagée, (b) plastifiée. Les valeurs du critère de résistance pour (c) le modèle d'endommagement, (d) le modèle de plasticité.

Nous avons reproduit aussi les valeurs des déplacements horizontaux et verticaux dans la configuration déformée de la section analysé (Figure 6). Nous notons bien sûr une ovalisation de la section avec plus de convergence dans la direction horizontale. Notons aussi la différence des champs de déplacements et donc de la convergence des galeries pour les deux modèles. Pour les mêmes paramètres, la convergence horizontale est trois

fois plus grande pour le modèle à endommagement que pour le modèle plastique, tandis que la convergence verticale est plus petite. Cela conduit à une ovalisation beaucoup plus marquée pour le modèle d'endommagement que le modèle plastique.

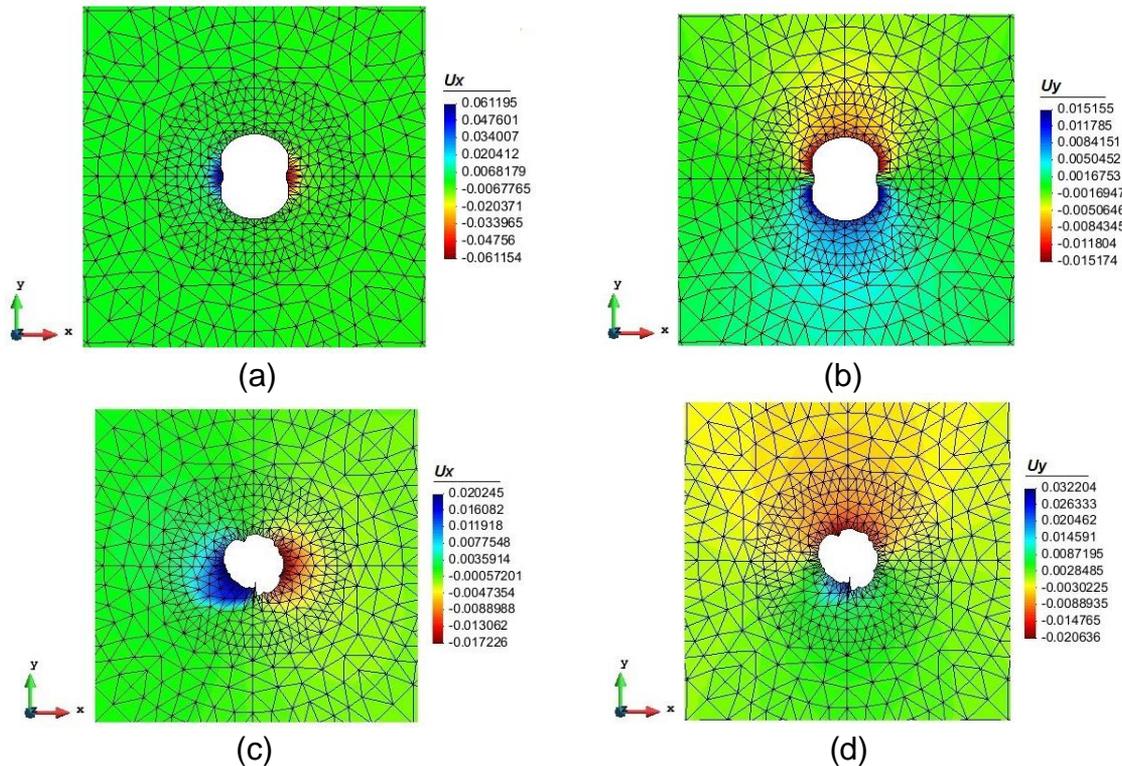


Figure 6 : isovaleurs des déplacements horizontaux et verticaux en cas d'endommagement (a-b) et de plasticité (c-d), dans la configuration déformée.

L'augmentation de la contrainte hors plan a pour effet de diminuer les dissymétries géométriques (Figure 7). La contrainte hors plan affecte les résultats à la fois en augmentant la contrainte moyenne dans le critère de Drucker-Prager, et en changeant la direction de la contrainte déviatorique maximale. Si cette direction de contrainte déviatorique maximale n'est plus dans le plan de la section, les anisotropies des résultats dans ce plan seront autant réduites. Mais, comme nous l'avons mentionné ci-dessus, au voisinage du front de taille où tous les phénomènes d'endommagement, plastification et de rupture prennent naissance, nous pouvons considérer des valeurs plus faibles de la contrainte hors plan, ce qui permet d'obtenir des dissymétries plus fortes des résultats. Mais le vrai problème est de nature 3D et nécessite une analyse plus approfondie qui est en cours d'avancement.

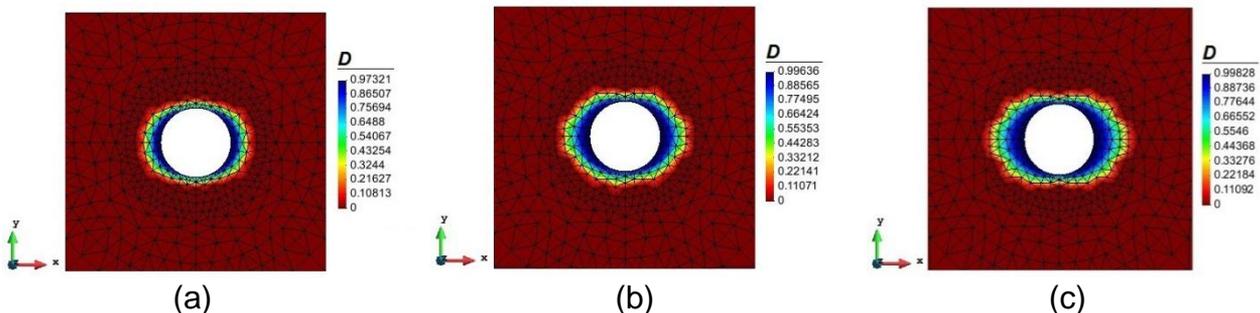


Figure 7 : Effet de la contrainte hors plan (σ_z) sur l'étendue de la zone endommagée ; (a) $\sigma_z = 10$ MPa, (b) $\sigma_z = 8$ MPa, (c) $\sigma_z = 5$ MPa. Les autres paramètres sont ceux du Tableau 1.

5. Conclusions et perspectives

Nous avons montré dans ce travail que la forme inhabituelle de la zone endommagée rencontrée parfois autour des ouvrages profonds dans les roches quasi-fragiles peut être expliquée par un phénomène d'instabilité et bifurcation lié à l'endommagement fragile. Ceci n'exclue pas que des phénomènes qui induisent une dissymétrie dans le problème initial, comme une anisotropie des contraintes initiales ou des propriétés du matériau, jouent aussi leur rôle sur la forme et l'étendue de cette zone. Mais ce que nous avons montré ici est qu'en l'absence de telles anisotropies significatives dans le problème initial, le phénomène d'instabilité d'évolution est apte à produire, sous certaines conditions, une nette dissymétrie des résultats finaux.

Nous avons aussi montré que les résultats de modélisation en élastoplasticité, même radoucissant, peuvent être très différents de ceux obtenus avec un modèle d'endommagement, même si les paramètres des modèles sont choisis de manière à reproduire les mêmes courbes de contraintes-déformation d'essais monotones.

Enfin, les modélisations présentées ici constituent une première approche des phénomènes considérés. Les modèles utilisés doivent être améliorés et leurs paramètres raffinés afin de pouvoir mieux approcher les caractéristiques de certains cas de zone endommagée observée autour d'ouvrages profonds. Par ailleurs, le même type d'analyse menée ici dans le plan de la section peut être menée aussi dans le plan vertical ou horizontal parallèle à l'axe de la galerie en configuration axi-symétrique. Même si le problème ne possède pas une symétrie axiale complète du fait de l'anisotropie des contraintes dans le plan de la section, et du moins dans le cas d'une faible anisotropie de ces contraintes, cette étude en axi-symétrie pourra apporter des informations complémentaires utiles à la compréhension du développement et de la géométrie de la zone perturbée mécaniquement.

6. Références

- Armand G., Lebon P., Cruchaudet M., Rebours H., Morel J., Wileveau Y., « EDZ Characterisation in the Meuse / Haute-Marne Underground Research Laboratory. Clays in Natural & Engineered Barriers for Radioactive Waste Confinement, 2007; 153-154.
- Armand, G., Leveau, F., Nussbaum, C., de La Vaissiere, R., Noiret, A., Jaeggi, D., Landrein, P. Righini, C. (2014). Geometry and properties of the excavation induced fractures at the Meuse/Haute-Marne URL drifts. *Rock Mech. Rock Eng.*, 47, 21-41. doi:10.1007/s00603-012-0339-6.
- Noiret A. Etude de la fracturation induite par le creusement et de l'EDZ pour une galerie de conception souple orientée suivant la contrainte horizontale majeure. ANDRA internal report, 2012.
- Pouya A. A finite element method for modeling coupled flow and deformation in porous fractured media. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 2015; 39(16): 1836–1852.
- Sadd M. H. "Elasticity: Theory, Applications, and Numerics", Elsevier 2005
- Seyedi, D., Vu, MN., Armand, G., Noiret, A., Numerical modeling of damage patterns around drifts in the Meuse/Haute-Marne URL. The 13th International ISRM Congress 2015, Montréal, Québec, Canada 10-13 May, 2015.
- Silvestre, N. (2007) "Generalized beam theory to analyse the buckling behaviour of circular cylindrical shells and tubes", in *Thin-Walled Structures*, Vol. 45, No. 2, February 2007, pp. 185-198.
- (voir http://shellbuckling.com/presentations/unstiffenedCylinders/pages/page_2.html)